

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»



**РОБОЧА ПРОГРАМА ВИБІРКОВОЇ
НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

Диференціальні рівняння в частинних похідних
(назва навчальної дисципліни)

Галузь знань: 11 «Математика та статистика»
(шифр і найменування галузі знань)

Спеціальність: 113 «Прикладна математика»
(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: «Прикладна математика»
(найменування освітньої програми)

Форма навчання: денна

Рівень вищої освіти третій (освітньо-науковий)

Харків 2023 рік

Робоча програма «Диференціальні рівняння в частинних похідних»

(назва дисципліни)

для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика»
освітньої програми: «Прикладна математика».

«26» серпня 2023 р., 12 с.

Розробник: Ніколаєв О.Г. завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу, д.ф.-м.н., професор

(прізвище та ініціали, посада, науковий ступінь та вчене звання)



Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри вищої математики та системного аналізу

(назва кафедри)

Протокол № 10 від « 30 » червня 2023 р.

Завідувач кафедри д.ф.-м.н., професор

(науковий ступінь та вчене звання)



О.Г. Ніколаєв

(ініціали та прізвище)

ПОГОДЖЕНО:

Гарант ОНП

завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу, д.ф.-м.н., професор



О.Г. Ніколаєв

Завідувач відділу аспірантури і докторантури



В.Б. Селевко

В.о. голови наукового товариства студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених



С.С. Жила

Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни (денна форма навчання)
Кількість кредитів – 5	Галузі знань <u>11 «Математика та статистика»</u> (шифр та найменування) Спеціальність <u>113 «Прикладна математика»</u> (код та найменування) Освітня програма <u>«Прикладна математика»</u> (найменування) Рівень вищої освіти: третій (освітньо-науковий)	Вибіркова компонента з переліку 2
Кількість модулів – 2		Навчальний рік
Кількість змістовних модулів – 3		2023/2024
Індивідуальне завдання _____ (назва)		Семестр
Загальна кількість годин – 64/150		3-й
		Лекції ¹⁾
Кількість тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 години; самостійної роботи студента – 5 годин (перша половина), 6 годин (друга половина)		32 годин
		Практичні, семінарські ¹⁾
		32 години
		Лабораторні ¹⁾
	_____ годин	
	Самостійна робота	
	86 годин	
	Вид контролю	
	модульний контроль, іспит	

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: 64/86

¹⁾ Аудиторне навантаження може бути зменшене або збільшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: засвоєння методів аналізу лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних (ЛДРЧП) та застосування їх при розв'язанні прикладних задач.

Завдання: опрацювання основних понять, формул, теорем, методів та алгоритмів теорій ЛДРЧП першого порядку, узагальнених функцій, функцій Гріна, просторів Соболева для застосування їх до аналізу основних класів ЛДРЧП.

Після вивчення дисципліни студенти повинні поглибити професійні знання, уміння та навички, які формують в межах обраної ОНП такі **компетентності:**

- Здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та/або дослідницько-інноваційної діяльності у сфері математики та статистики, що передбачає глибоке переосмислення наявних та створення нових цілісних знань та/або професійної практики;
- ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- ЗК02. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.
- СК01. Здатність виконувати оригінальні дослідження, досягати наукових результатів, які створюють нові знання у галузях математики і статистики та дотичних до них міждисциплінарних напрямках і можуть бути опубліковані у провідних наукових фахових виданнях з та суміжних галузей.
- СК05. Здатність виявляти, ставити та вирішувати проблеми дослідницького характеру у науковому пізнанні, оцінювати та забезпечувати якість виконуваних досліджень.
- СК07. Здатність дотримуватись етики досліджень, а також правил академічної доброчесності в наукових дослідженнях та науково-педагогічній діяльності.
- СК09. Здатність до продукування нових ідей і розв'язання комплексних проблем наукового пізнання, а також до застосування сучасних методологій, методів та інструментів педагогічної та наукової діяльності у сфері прикладної математики.

Та здобути **додаткові компетентності:**

- здатність знаходити універсальні підходи до розв'язання прикладних задач у різних предметних областях;
- здатність аналізувати моделі механіки деформівного твердого тіла аналітичними і числовими методами.

Програмні результати навчання:

ПРН01. Мати передові концептуальні та методологічні знання з прикладної математики і на межі предметних галузей, а також дослідницькі навички, достатні для проведення наукових і прикладних досліджень на рівні останніх світових досягнень з відповідної галузі, отримання нових знань та/або здійснення інновацій.

ПРН03. Формулювати і перевіряти гіпотези; використовувати для обґрунтування висновків належні докази, зокрема, результати теоретичного аналізу, експериментальних досліджень (опитувань, спостережень тощо) і математичного та/або комп'ютерного моделювання, наявні літературні дані.

ПРН04. Розробляти та досліджувати концептуальні, математичні і комп'ютерні моделі процесів і систем, ефективно використовувати їх для отримання нових знань та/або створення інноваційних продуктів у прикладній математиці та дотичних міждисциплінарних напрямках.

ПРН05. Планувати і виконувати експериментальні та/або теоретичні дослідження з прикладної математики та дотичних міждисциплінарних напрямків з використанням сучасних інструментів, критично аналізувати результати власних досліджень і результати інших дослідників у контексті усього комплексу сучасних знань щодо досліджуваної проблеми.

ПРН08. Розуміти загальні принципи та методи прикладної математики, а також методологію наукових досліджень, застосувати їх у власних дослідженнях у сфері прикладної математики та у викладацькій практиці.

Також здобувач повинен уміти створювати нові моделі механіки деформівного твердого тіла, а також нові методи дослідження полів і процесів при напруженні, деформуванні та руйнуванні матеріалів; уміти застосовувати методи розв'язання крайових задач для аналізу полів і процесів механіки деформівного твердого тіла.

Для одержання програмних результатів навчання студент повинен знати:

основи теорії ЛДРЧП першого порядку, теорію рівнянь Лапласа і Пуассона та їх розв'язків в $\square^2$ і $\square^3$, умови коректності постановок крайових задач для цих рівнянь, основи теорії узагальнених функцій, фундаментальні розв'язки ЛДРЧП другого порядку і методи їх побудови, основи теорії просторів Соболева та узагальнених розв'язків для рівняння Пуассона.

вміти:

розв'язувати ЛДРЧП першого порядку, ДР у повних диференціалах і ДР Пфаффа, коректно ставити крайові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона, застосовувати метод конформних відображень при розв'язанні крайових задач, виконувати операції з узагальненими функціями в просторах D' і S' , знаходити функції Гріна для ЛДРЧП другого порядку, знаходити узагальнені похідні функцій з простору L_p .

Міждисциплінарні зв'язки: базою для засвоєння курсу є дисципліна «Аналіз операторних рівнянь». Використовується в дисциплінах: «Крайові задачі механіки деформівного твердого тіла», «Асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь».

2. Програма навчальної дисципліни

Модуль 1

Змістовий модуль 1. Загальні поняття теорії ЛДРЧП

Тема 1. ЛДРЧП першого і другого порядків

Загальні поняття теорії ДРЧП. Теорема Коші – Ковалевської існування аналітичного розв'язку ДРЧП з початковою умовою на гіперповерхні. Задача Коші для ДРЧП першого порядку. Приклад. Загальна теорія ЛДРЧП першого порядку. Характеристична система звичайних ДР. Зв'язок розв'язків однорідних ЛДРЧП першого порядку з першими інтегралами характеристичної системи звичайних ДР. Кількість незалежних розв'язків однорідного ЛДРЧП першого порядку від n незалежних змінних. Теорема про загальний розв'язок однорідного ЛДРЧП першого порядку. Неоднорідні ЛДРЧП. ДР у повних диференціалах. Умова повної інтегровності. Цілком інтегровні ДР від двох незалежних змінних, побудова загального розв'язку. Рівняння Пфаффа. Геометричний зміст умови повної інтегровності. Метод Бертрана. ЛДРЧП другого порядку. Характеристики. Задача Коші для ЛДРЧП другого порядку. Теорема Коші Ковалевської. Задача Коші з даними на характеристичній поверхні.

Змістовий модуль 2. ЛДРЧП другого порядку еліптичного типу

Тема 2. Крайові задачі для рівняння Лапласа і Пуассона

Гармонічні функції. Перша та друга формули Гріна. Теорема про середнє значення гармонічної функції. Субгармонічна та супергармонічна функції. Принцип максимуму для гармонічної функції. Априорні оцінки. Постановка внутрішніх крайових задач для рівняння Лапласа. Теорема єдиності. Лема про усувну особливість гармонічної функції. Умови регулярності гармонічної функції на нескінченності. Перетворення Кельвіна. Постановка зовнішніх крайових задач для рівняння Лапласа. Теорема єдиності. Властивості гармонічних функцій. Теорема Гарнака. Теорема Ліувілля. Рівняння Лапласа на площині. Зв'язок гармонічної функції з аналітичною функцією в області. Постановка крайових задач у плоскій області. Умови на нескінченності. Теорема єдиності. Метод конформних відображень у крайових задачах. Формула Пуассона для кола.

Модульний контроль

Модуль 2

Змістовий модуль 3. Елементи теорії узагальнених функцій, просторів Соболева, фундаментальних і узагальнених розв'язків ЛДРЧП

Тема 3. Узагальнені функції

Простір $D(\Omega)$ основних нескінченно гладких і фінітних функцій. Збіжність у просторі основних функцій. Усереднювальне ядро, його властивості. Середні функції, їх властивості. Означення узагальненої функції (УФ). Простір узагальнених функцій $D'(\Omega)$. Регулярні та сингулярні УФ. Збіжність у просторі УФ. Дельта-функція. Властивості УФ з простору $D'(\Omega)$. Диференціювання УФ. Властивості операції диференціювання. Узагальнені функції повільного зростання. Простір основних функцій S . Простір S' УФ повільного зростання. Перетворення Фур'є основних функцій з простору S , його

властивості. Рівність Парсеваля. Перетворення Фур'є узагальнених функцій з простору S' .

Тема 4. Фундаментальні розв'язки лінійних диференціальних операторів у частинних похідних другого порядку. Функція Гріна

Фундаментальний розв'язок ЛДРЧП. Знаходження фундаментальних розв'язків (ФР) ЛДОЧП методом перетворення Фур'є. Застосування до оператора теплопровідності та оператора Лапласа. Інтегральне подання Гріна. Функція Гріна першої та другої крайових задач для рівняння Лапласа, їх властивості. Побудова функції Гріна першої крайової задачі для кулі методом електростатичних зображень. Інтеграл Пуассона. Ядро Пуассона, його властивості. Побудова функції Гріна зовнішньої задачі Неймана для кулі. Оператор Лапласа у сферичних координатах. Формула Діні.

Тема 5. Простори Соболева і узагальнені розв'язки крайових задач

Узагальнена похідна узагальненої функції за Соболевим. Простори Соболева $W_2^1(\Omega)$, $W_{2,0}^1(\Omega)$. Повнота. Нерівність Фрідрікса. Слід функції з $W_{2,0}^1(\Omega)$. Узагальнений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Теорема про існування та єдиність узагальненого розв'язку.

Модульний контроль

3. Структура навчальної дисципліни

Назви змістовних модулів і тем	Кількість годин				
	Усього	У тому числі			
		л	п	лаб.	с. р.
1	2	3	4	5	6
Модуль 1					
Змістовий модуль 1. Загальні поняття теорії ЛДРЧП					
Тема 1. ЛДРЧП першого і другого порядків	35	8	8		19
Разом за змістовним модулем 1	35	8	8		19
Змістовий модуль 2. ЛДРЧП другого порядку еліптичного типу					
Тема 2. Крайові задачі для рівняння Лапласа і Пуассона	34	8	6		20
Модульний контроль	2		2		
Разом за змістовним модулем 2	36	8	8		20
Модуль 2					
Змістовий модуль 3. Елементи теорії узагальнених функцій, просторів Соболева, фундаментальних і узагальнених розв'язків ЛДРЧП					
Тема 3. Узагальнені функції	30	6	6		18
Тема 4. Фундаментальні розв'язки ЛДОЧП другого порядку. Функція Гріна	30	6	6		18
Тема 5. Простори Соболева і узагальнені розв'язки крайових	18	4	2		11

задач					
Модульний контроль	2		2		
Разом за змістовним модулем 3	79	16	16		47
Усього годин	150	32	32		86

4. Теми семінарських занять

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Однорідні ЛДРЧП першого порядку	2
2-3	Неоднорідні ЛДРЧП першого порядку	4
4	Задача Коші. Квазілінійні рівняння. Рівняння Пфаффа	2
5	Гармонічні функції та їх властивості	2
6-7	Крайові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона	4
8	Модульний контроль	2
9	Простори основних і узагальнених функцій	2
10	Похідні узагальнених функцій	2
11	Перетворення Фур'є узагальнених функцій	2
12	Фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь	2
13-14	Функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа	4
15	Простори Соболева. Узагальнені розв'язки крайових задач	2
16	Модульний контроль	2
	Разом	32

6. Теми лабораторних занять

7. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	2	3
1	ЛДРЧП першого і другого порядків (Тема 1)	19
2	Крайові задачі для рівняння Лапласа і Пуассона (Тема 2)	20
3	Узагальнені функції (Тема 3)	18
4	Фундаментальні розв'язки ЛДРЧП другого порядку. Функція Гріна (Тема 4)	18
5	Простори Соболева і узагальнені розв'язки крайових	11

	задач (Тема 5)	
	Разом	86

8. Індивідуальні завдання

9. Методи навчання

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, індивідуальні консультації, самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими кафедрою

6. Методи контролю

Проведення поточного контролю, письмового модульного контролю, фінального контролю у вигляді семестрового контролю у вигляді іспиту (проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску).

12. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

12.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Складові навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
Змістовний модуль 1			
Робота на лекціях	0...0,5	4	0...2
Робота на практичних заняттях	0...4	4	0...16
Самостійна робота	0...2	3	0...6
Змістовний модуль 2			
Робота на лекціях	0...0,5	4	0...2
Робота на практичних заняттях	0...4	3	0...12
Самостійна робота	0...2	3	0...6
Модульний контроль	0...25	1	0...24
Змістовний модуль 3			
Робота на лекціях	0...0,5	8	0...4
Робота на практичних заняттях	0...4	7	0...28
Самостійна робота	0...2	7	0...14
Модульний контроль	0...25	1	0...24
Усього за семестр(*)			0...138

(*) Якщо кількість модульних балів у студента перевищує 100, то як підсумкову оцінку виставляється 100 балів.

Семестровий контроль (іспит) проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску до іспиту. При складанні

семестрового іспиту студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для іспиту складається з п'яти питань (двох теоретичних і трьох практичних). За кожне питання студент може одержати максимальну суму балів - 20.

12.2. Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки:

Задовільно (60-74). Оцінка ставиться, якщо студент знає основні теоретичні поняття, наведені в курсі, володіє методами розв'язання ЛДРЧП першого порядку, може коректно поставити основні крайові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона на площині і у просторі, знає основні властивості гармонічних функцій, зв'язок гармонічних і аналітичних функцій на площині, метод конформних відображень, означення основних і узагальнених функцій, функцій Гріна. Відповіді студента розкривають суть питань без достатньої повноти і обґрунтування, або у відповідях є неправильне тлумачення окремих понять та неточність у формулюванні відповідних термінів.

Добре (75-89). Оцінка ставиться, якщо студент вільно володіє логіко-понятійним апаратом курсу, може обґрунтувати основні його положення (теореми існування та єдиності розв'язків крайових задач, властивості гармонічних функцій і функцій Гріна, формули Пуассона), знає основні положення теорії узагальнених функцій, просторів Соболева, узагальнених розв'язків, розв'язує практичні завдання білету. У відповідях студента можуть допускатися окремі помилки непринципового характеру, які не впливають на розкриття суті теоретичних питань.

Відмінно (90-100). Оцінка ставиться, якщо студент, має стійкі системні знання з дисципліни, уміє їх обґрунтовувати, узагальнювати та продуктивно їх використовує на творчому рівні. Задачі білету розв'язані та мають пояснення до кожного етапу розв'язання.

12.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

Протягом семестру студент отримує бали за накопичувальною системою згідно з таблицею наведеною в п. 12.1. Дано деякі пояснення до таблиці.

Робота на лекції – активна форма засвоєння матеріалу курсу: 0,5 бала ставиться за продумані питання, які студент задає лектору, участь в обговоренні предмета лекції, відповіді на питання, які по ходу лекції задає викладач. Активність студента може заохочуватися додатковими коефіцієнтами, які множаться на 0,5 бали.

Робота на практичному занятті оцінюється так: 2,5 бали за самостійно розв'язану задачу або 1 бал за розв'язану задачу за допомогою викладача, 1,5 бали за обґрунтовану відповідь на теоретичне питання з доведенням основних положень біля дошки.

Самостійна робота – 2 бал ставиться студенту за виконання домашнього завдання разом з його захистом у поза аудиторний час.

Модульний контроль проводиться два рази на семестр на 8 і 16 тижнях на практичних заняттях. Білет для модульного контролю включає 4 питання (два теоретичних і два практичних). За відповідь на одне питання студент може отримати максимально 6 балів. Критерії оцінювання у відсотковому відношенні відповідають якісним критеріям з п. 12.2.

Шкала оцінювання: бальна і традиційна

Сума балів	Оцінка за традиційною шкалою	
	Іспит, диференційований залік	Залік
90 – 100	Відмінно	Зараховано
75 – 89	Добре	
60 – 74	Задовільно	
0 – 59	Незадовільно	Не зараховано

13. Методичне забезпечення

Підручники, навчальні посібники, які видані в університеті:

1. Ніколаєв О.Г. Диференціальні рівняння: підручник. В 2-х кн.. Кн. 2 – Х.: ХАІ, 2020.
2. Ніколаєв О.Г. Функціональний аналіз: підручник. – Х.: ХАІ, 2021.
3. Барахов К.П., Куреннов С.С., Соловьев О.І. Рівняння математичної фізики: навч. посібник. - Х.: ХАІ, 2020.
4. Ніколаєв О.Г. Диференціальні рівняння: підручник. В 2-х кн.. Кн. 1 – Х.: ХАІ, 2019.
5. Брисіна І.В. та ін. Практичний курс вищої математики в 4-х кн. Кн. 4. Навч. посібник для ВНЗ України. – Харків: Нац. аерокос. ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2004.
6. Робочий зошит. Варіаційне числення. Диференціальні рівняння у частинних похідних. Теорія ймовірності. – Х.: ХАІ, 2003.

Електронний ресурс, на якому розміщено навчально-методичний комплекс дисципліни: [//library.khai.edu](http://library.khai.edu). Комплекс включає в себе такі обов’язкові складові:

- робоча програма дисципліни;
- конспект лекцій, підручники (навчальні посібники), в тому числі в електронному вигляді, які за змістом повністю відповідають робочій програмі дисципліни;
- методичні вказівки та рекомендації для виконання розрахункових та практичних робіт, а також рекомендації для самостійної підготовки;

- тематики індивідуальних завдань;
- приклади розв'язування типових задач чи виконання типових завдань;
- питання для контрольних заходів;

Базова

1. Ніколаєв О.Г. Диференціальні рівняння: підручник. В 2-х кн.. Кн. 2 – Х.: ХАІ, 2020.
2. Ніколаєв О.Г. Диференціальні рівняння: підручник. В 2-х кн.. Кн. 1 – Х.: ХАІ, 2019.
3. Ніколаєв О.Г. Функціональний аналіз: підручник. – Х.: ХАІ, 2021.
4. Барахов К.П., Курєннов С.С., Солов'єв О.І. Рівняння математичної фізики: навч. посібник. - Х.: ХАІ, 2020.
5. Брисіна І.В. та ін. Практичний курс вищої математики в 4-х кн. Кн. 4. Навч. посібник для ВНЗ України. – Х.: ХАІ, 2004.
6. Робочий зошит. Варіаційне числення. Диференціальні рівняння у частинних похідних. Теорія ймовірності. – Х.: ХАІ, 2003.
7. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 334 с.
8. Курпа Л.В., Лінник Г.Б. Рівняння математичної фізики. – Харків.: «Підручник НТУ «ХП», 2011.
9. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник. – Львів: Львівська політехніка, 2010.
10. Мельник Т.А., Крєневич А.П. Теорія просторів Соболева та узагальнені розв'язки крайових задач: підручник. – Київ, ВПЦ «Київський університет», 2019.

Допоміжна

1. Evans L.C. Partial Differential Equations. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
2. Brezis H. Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations. – New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, LLC, 2011.
3. Komech A., Komech A. Principles of Partial Differential Equations. – New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, LLC, 2009.
4. Гончаренко В. М. Основи теорії рівнянь у частинних похідних. – Київ: Вища школа, 1985. (рос. мовою)

15. Інформаційні ресурси

Сайт бібліотеки Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» <https://library.khai.edu>.