

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Голова приймальної комісії  
Національного аерокосмічного  
університету ім. М.Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»



Олексій ЛИТВИНОВ

\_\_\_\_\_ 2024 р.

**ПРОГРАМА  
ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ**

для здобуття освітнього ступеня доктора філософії  
за освітньо-науковою програмою  
зі спеціальності

**113 – Прикладна математика**

(освітньо-наукова програма «Прикладна математика»)

**у 2024 році**

Харків  
2024

## Вступ

Вступне випробування для здобуття освітнього ступеня доктора філософії за освітньо-науковою програмою зі спеціальності 113 – Прикладна математика (освітньо-наукова програма «Прикладна математика») відбувається відповідно до «Правил прийому на навчання до Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» в 2021 році» у формі індивідуального письмового фахового іспиту, який приймає фахова екзаменаційна комісія з певної спеціальності (освітньої програми), склад якої затверджується наказом ректора Університету.

До фахового іспиту входять питання за темами:

- Математичний аналіз.
- Алгебра і геометрія.
- Теорія ймовірності, математична статистика, теорія випадкових процесів.
- Звичайні диференціальні рівняння.
- Функціональний аналіз.
- Рівняння математичної фізики.
- Методи оптимізації.
- Чисельні методи.
- Моделювання систем.
- Теорія оптимальних систем.

Перелік питань за темами наведений у програмі.

### Критерії оцінювання знань

1. Результат фахового іспиту визначається за шкалою від 100 до 200 балів.
2. Екзаменаційний білет складається з 25 питань тестового характеру.

Результат фахового іспиту розраховується за формулою:

$75+k \cdot n$ , де  $k$  – кількість балів за відповідь на питання:  $k = 5$ , якщо відповідь правильна та у протилежному випадку  $k = 0$ ,  $n$  – кількість питань у білеті ( $n = 25$ ).

3. Якщо вступник отримав менше ніж 100 балів, то вважається, що він не склав іспит і до участі в конкурсі не допускається.

## Питання за темами

### 1. Математичний аналіз

Диференціювання функцій однієї та декількох змінних. Похідна за напрямом. Диференціювання векторної функції за векторним аргументом. Формула Тейлора для функцій однієї та декількох змінних. Ряд Тейлора. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування функцій. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніця. Застосування визначеного інтеграла. Невласні інтеграли. Криволінійні інтеграли. Кратні інтеграли. Заміна змінних в кратних інтегралах. Диференціальні операції теорії поля. Формули Гріна, Гаусса-Остроградського, Стокса. Типи і властивості векторних полів. Числові і функціональні ряди. Ознаки збіжності. Рівномірна збіжність функціонального ряду. Ознака Вейерштрасса. Ряди і інтеграл Фур'є.

### 2. Алгебра і геометрія

Операції над матрицями. Обернена матриця. Ранг матриці. Визначники  $n$ -го порядку та їх властивості. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теореми Кронекера-Капеллі, Фредгольма. Метод виключення Гаусса. Векторні простори. Базиси, вимірність. Підпростори. Лінійна оболонка системи векторів. Евклідов простір, аксіоми скалярного добутку. Ортонормовані системи векторів. Процес ортогоналізації. Відстань вектору від підпростору. Матриця Грама, її властивості. Лінійний оператор в векторному просторі, матриця оператора в деякому базисі, її зміна при зміні базису. Лінійні оператори в евклідовому просторі.

Власні вектори і власні значення лінійного оператора. Алгебраїчна та геометрична кратності власного значення. Оператори простої структури. Жорданів базис і жорданова матриця лінійного оператора. Теорема про існування жорданового базису. Квадратичні форми на евклідовому просторі. Канонічний вигляд квадратичної форми. Знаковизначені квадратичні форми.

### 3. Теорія ймовірності, математична статистика, теорія випадкових процесів

Випадкові події. Аксиоматична побудова теорії ймовірностей. Теореми множення та додавання ймовірностей. Формули повної ймовірності і Байєса. Випадкові величини. Функція розподілу. Щільність розподілу. Числові характеристики та моменти випадкової величини. Закони розподілу випадкових величин: Бернуллі, Пуассона, нормальний. Їх числові характеристики. Граничні теореми теорії ймовірностей для незалежних, однаково розподілених випадкових величин. Багатовимірні випадкові величини, їх характеристики. Коваріаційна матриця. Коефіцієнти кореляції. Характеристична функція випадкового вектора. Числові характеристики нормального випадкового вектора. Точкові оцінки числових параметрів випадкової величини, їх властивості: незміщеність, обґрунтованість, ефективність, достатність. Метод максимальної правдоподібності. Нерівність Рао-Крамера. Інтервальні оцінки числових характеристик випадкових величин. Перевірка статистичних гіпотез. Критерій Пірсона. Випадкові процеси та їх числові характеристики. Основні класи випадкових процесів: процеси Гауса, Вінера, Пуассона. Стационарні випадкові процеси, властивості коваріаційної функції процесу. Стационарні випадкові послідовності (СВП). Спектральна функція і спектральна щільність СВП. Лінійні перетворення СВП. Марковські випадкові процеси. Рівняння Колмогорова-Чепмена. Ланцюги Маркова. Перехідні ймовірності, їх властивості.

### 4. Звичайні диференціальні рівняння

Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь, розв'язних відносно старшої похідної. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь старших порядків. Визначник Вронського. Формула Ліувілля-Остроградського. Загальна теорія систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Матриця Коші. Експоненціал матриці. Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Задача Штурма-Ліувілля. Власні значення і власні функції, їх властивості. Розклад функції в ряд за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля. Функція Гріна крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, її побудова.

Інтегральне рівняння задачі Штурма-Ліувілля. Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь. Стійкість лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами.

## 5. Функціональний аналіз

Аксиоматика метричних, нормованих, евклідових просторів. Властивості метрики, норми, скалярного добутку. Топологічні поняття в метричному просторі. Відкриті і замкнені множини, їх властивості, всюди щільні і ніде не щільні множини. Сепарабельні простори. Повні метричні простори. Банахові (БП) і гільбертові простори (ГП). Принцип вкладених куль. Підпростори нормованого простору. Відстань вектора від підпростору. Елемент найкращого наближення (ЕНН). Існування та єдиність ЕНН для підпростору гільбертова простору. Ортонормовані системи (ОНС) в ГП. Ряди Фур'є за ОНС. Екстремальна властивість відрізка ряду Фур'є. Многочлени Лежандра. Повні ортонормовані системи. Нерівність Бесселя, рівність Парсеваля. Компактність множини в МП, властивості компактних множин. Критерій компактності Хаусдорфа. Лінійні неперервні і обмежені функціонали. Норма лінійного обмеженого функціонала, формули для обчислення норми. Спряжений простір до нормованого простору. Теорема Ріса про загальний вид лінійного обмеженого функціонала в гільбертовому просторі. Алгебра лінійних обмежених операторів. Формули для обчислення норми оператора. Рівномірна збіжність послідовності операторів. Обернений оператор. Неперервна оберненість лінійного обмеженого оператора. Критерій неперервної оберненості. Стискаючі оператори в метричному просторі. Принцип стискаючих відображень. Компактні оператори в нормованому просторі. Їх властивості. Операторні рівняння з компактними операторами. Теорема Фредгольма.

## 6. Рівняння математичної фізики

Моделі процесів і полів, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Рівняння коливання струни і мембрани, розповсюдження тепла в твердому тілі, рівняння Лапласа, рівняння Нав'є-Стокса. Перетворення координат в лінійному диференціальному рівнянні в частинних похідних (ЛДРЧП) другого порядку. Класифікація ЛДРЧП другого порядку. Постановки початково-крайових

задач для ЛДРЧП другого порядку. Теореми існування та єдиності. Метод розділення змінних в задачах коливання струни і мембрани. Функції Бесселя. Неоднорідні рівняння. Метод розділення змінних в задачі теплопровідності тонкого скінченного стрижня. Неоднорідне рівняння. Функція джерела. Задача для нескінченного стрижня. Інтеграл Пуассона. Крайові задачі для рівняння Лапласа. Рівняння Лапласа в циліндричних та сферичних координатах. Розділення змінних. Функції Лежандра. Загальні властивості гармонічних функцій. Принцип максимуму. Потенціали простого шару, подвійного шару і об'ємний потенціал, їх властивості. Застосування до розв'язання крайових задач. Функція джерела та її побудова методом електростатичних зображень. Функція джерела для кола і кулі. Інтеграл Пуассона.

## **7. Методи оптимізації**

Постановка задач оптимізації. Класифікація задач оптимізації. Задачі лінійного програмування. Симплекс-метод. Задачі цілочислового програмування. Метод віток і меж. Загальна задача нелінійного програмування. Теорема Куна-Таккера. Метод найскорішого спуску розв'язання задачі безумовної оптимізації. Постановка задачі многокритеріальної оптимізації. Множина Парето. Метод вагових множників. Постановка задачі оптимального керування. Принцип максимуму Понтрягіна. Метод динамічного програмування Беллмана.

## **8. Чисельні методи**

Постановка задачі інтерполяції. Інтерполяційні многочлени Лагранжа, Ньютона. Сплайн-інтерполяція. Ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод простої ітерації, метод Зейделя, метод прогону. Чисельне інтегрування. Квадратурні формули Гаусса. Чисельні методи розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Методи Ейлера, Рунге-Кутта, Адамса. Метод скінченних різниць для розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. Проекційні методи розв'язання крайових задач. Методи колокацій, Гальоркіна. Варіаційні методи розв'язання крайових задач. Метод скінченних елементів.

## 9. Моделювання систем

Варіаційні методи моделювання систем. Методи регресійного аналізу в моделюванні систем. Імітаційне моделювання систем. Ідентифікація параметрів математичної моделі.

## 10. Теорія оптимальних систем

Проблеми багатокритеріальної оптимізації. Формування Парето-оптимальної множини розв'язків. Основні методи розв'язання багатокритеріальних задач: метод головного критерія, метод ідеальної точки, метод згортки критеріїв. Звуження множини Парето на основі інформації про відносну важливість критеріїв. Комбінаторна оптимізація на основі генетичних алгоритмів.

## ЛІТЕРАТУРА

1. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Г. І. Кошовий, О. Г. Ніколаєв та ін. Практичний курс вищої математики в чотирьох книгах. Кн. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї та декількох змінних: Навч. посібник для ВУЗів. – Харків: Нац. аерокос. ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2004.
2. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Г. І. Кошовий, О. Г. Ніколаєв та ін. Практичний курс вищої математики в чотирьох книгах. Кн. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Кратні та криволінійні інтеграли. Елементи теорії векторного поля.: Навч. посібник для ВУЗів. – Харків: Нац. аерокос. ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2004.
3. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Г. І. Кошовий, О. Г. Ніколаєв та ін. Практичний курс вищої математики в чотирьох книгах. Кн. 3. Ряди. Інтеграл Фур'є. Функції комплексної змінної та операційне числення. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник для ВУЗів. – Харків: Нац. аерокос. ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2004.
4. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Г. І. Кошовий, О. Г. Ніколаєв та ін. Практичний курс вищої математики в чотирьох книгах. Кн. 4. Варіаційне числення.

Рівняння математичної фізики. Випадкові процеси: Навч. посібник для ВУЗів. – Харків: Нац. аерокос. ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2004.

5. Ніколаєв О.Г. Алгебра і геометрія: Підручник. – Харків: ХАІ, 2017.
6. Ніколаєв О.Г., Рвачова Т.В., Соловійов О.І. Функціональний аналіз: Навч. посібник. = Харків: ХАІ, 2008.
7. Головченко О.В., Ніколаєв О.Г. та ін. Варіаційні методи: Навч. посібник. – Харків: ХАІ, 2008. – 92 с.
8. Ніколаєв О.Г. Диференціальні рівняння: Підручник. Кн. 1. – Харків: ХАІ, 2019.
9. Ніколаєв О.Г. Диференціальні рівняння: Підручник. Кн. 2. – Харків: ХАІ, 2020.
10. Ніколаєв О.Г., Кузніченко В.М. Моделювання складних систем: Навч. посібник. – Харків: ХАІ, 2020.
11. Вознюк С.М., Щербакова Ю.А. Числові методи системного аналізу: Навч. посібник. – Харків: ХАІ, 2010.
12. Барахов К.П. Методи лінійної та цілочислової оптимізації: Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського „Харків. авіац. ін-т”, 2019.
13. Карташов О.В. Методи умовної оптимізації: Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського „Харків. авіац. ін-т”, 2013.
14. Boccaro N. Modeling complex system. New York:Springer, 2004.
15. Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Slowinski, R. Multiobjective Optimization. Interactive and Evolutionary Approaches. New York:Springer, 2008.

Гарант освітньо-наукової програми «Прикладна математика»



(підпис)

О.Г. Ніколаєв

(ініціали та прізвище)

Програму розглянуто й узгоджено на випусковій кафедрі 405

Протокол № 8 від « 21 » березня 2024 р.

Завідувач кафедри 405



(підпис)

Н.В. Савченко

(ініціали та прізвище)



ПОГОДЖЕНО

Проректор з наукової роботи  
університету



В. В. Павліков

Завідувач відділу  
аспірантури і докторантури



В. Б. Селевко