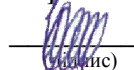


Міністерство освіти і науки України  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра «Вищої математики та системного аналізу» (№ 405)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Гарант освітньої програми

  
(підпис)

О.Г. Ніколаєв  
(ініціали та прізвище)

« 25 » червня 2021 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА ОБОВ'ЯЗКОВОЇ  
НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

Функціональний аналіз

(назва навчальної дисципліни)

**Галузь знань:** 12 «Інформаційні технології»  
(шифр і найменування галузі знань)

**Спеціальність:** 124 «Системний аналіз»  
(код та найменування спеціальності)

**Освітні програми:** Системний аналіз і управління.  
(найменування освітньої програми)

**Форма навчання: денна**

**Рівень вищої освіти перший (бакалаврський)**

**Харків 2021 рік**

Робоча програма «Функціональний аналіз»  
(назва дисципліни)

для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз» та освітньої програми:  
«Системний аналіз і управління».

«20» червня 2021 р., 13 с.

Розробник: Ніколаєв О.Г. завідувач кафедри вищої математики та системного  
аналізу, д.ф.-м.н., професор

(прізвище та ініціали, посада, науковий ступінь та вчене звання)



(підпис)

Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри \_\_вищої математики та  
системного аналізу\_\_

(назва кафедри)

Протокол № 11 від « 25 » червня 2021 р.

Завідувач кафедри д.ф.-м.н., професор  
(науковий ступінь та вчене звання)



(підпис)

О.Г. Ніколаєв  
(ініціали та прізвище)

## 1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни (денна форма навчання)
Кількість кредитів – 5	<p style="text-align: center;"><b>Галузі знань</b>  <u>12 «Інформаційні технології»</u>  <small>(шифр та найменування)</small></p> <p style="text-align: center;"><b>Спеціальності</b>  <u>124 «Системний аналіз»</u>  <small>(код та найменування)</small></p> <p style="text-align: center;"><b>Освітні програми</b>  <u>Системний аналіз і управління.</u>  <small>(найменування)</small></p> <p style="text-align: center;"><b>Рівень вищої освіти:</b>                      перший (бакалаврський)</p>	Обов'язкова
Кількість модулів – 2		<b>Навчальний рік</b>
Кількість змістовних модулів – 3		2021/2022
Індивідуальне завдання _____ <small>(назва)</small>		<b>Семестр</b>
Загальна кількість годин – 72/150		5-й
Кількість тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 5 годин (перша половина семестру), 4 години (друга половина семестру) самостійної роботи студента – 5 годин		<b>Лекції <sup>1)</sup></b>
		40 годин
		<b>Практичні, семінарські <sup>1)</sup></b>
		32 години
		<b>Лабораторні <sup>1)</sup></b>
	_____ годин	
	<b>Самостійна робота</b>	
78 годин		
	<b>Вид контролю</b>	
	модульний контроль, іспит	

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: 72/78

<sup>1)</sup> Аудиторне навантаження може бути зменшене або збільшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

## 2. Мета та завдання навчальної дисципліни

**Мета вивчення:** засвоєння основних положень функціонального аналізу та їх застосування до обчислювальної математики, диференціальних та інтегральних рівнянь.

**Завдання:** відпрацювання основних понять, теорем, методів та алгоритмів дисципліни, а саме: властивості метричних, банахових та гільбертових просторів; топологічні поняття метричних просторів; основні принципи функціонального аналізу; загальні поняття теорії лінійних функціоналів і лінійних операторів в нормованих і гільбертових просторах; умови розв'язності операторних рівнянь з обмеженим та компактним операторами.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні закласти основи таких **компетентностей**:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК 1);
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях (ЗК 2);
- знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності (ЗК 4);
- здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел (ЗК 7);
- здатність використовувати системний аналіз як сучасну міждисциплінарну методологію, що базується на прикладних математичних методах та сучасних інформаційних технологіях і орієнтована на вирішення задач аналізу і синтезу технічних, економічних, соціальних, екологічних та інших складних систем (ФК 1);
- здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів (ФК 2);
- здатність представляти математичні аргументи і висновки з них з ясністю і точністю і в таких формах, які підходять для аудиторії як усно так і в письмовій формі. (ФК 10).

### **Програмні результати навчання:**

- знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, векторну та лінійну алгебру, аналітичну геометрію та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу (ПРН 1);
- знати та вміти застосовувати базові методи якісного аналізу та інтегрування звичайних диференціальних рівнянь і систем, диференціальних рівнянь у частинних похідних, в тому числі рівнянь математичної фізики (ПРН 4)
- знати основні положення теорії метричних просторів, лебегівської теорії міри та інтеграла, теорії обмежених лінійних операторів в банахових та гільбертових просторах, застосовувати техніку і методи функціонального

аналізу для розв'язання задач керування складними процесами в умовах невизначеності. (ПРН 5).

**Для одержання програмних результатів навчання студент повинен знати:**

- означення та властивості метричних, банахових і гільбертових просторів;
- топологічні поняття метричних просторів;
- основні принципи функціонального аналізу;
- загальні поняття теорії лінійних функціоналів і лінійних операторів в нормованих і гільбертових просторах;
- умови розв'язності операторних рівнянь з обмеженим та компактним операторами;

**повинен вміти:**

- знаходити границі послідовностей елементів в метричних, банахових та гільбертових просторах;
- перевіряти відкритість та замкненість множин в метричному просторі, а також сепарабельність просторів;
- досліджувати простори на повноту;
- знаходити елементи найкращого наближення до підпростору;
- ортогоналізувати системи елементів в гільбертовому просторі, розкладувати елемент за ортонормованою системою в узагальнений ряд Фур'є;
- перевіряти компактність множин в нормованих просторах;
- перевіряти лінійність, обмеженість, компактність операторів;
- знаходити норми лінійних функціоналів і операторів, границі послідовностей операторів;
- знаходити спряжений оператор до даного, обернений оператор до даного;
- досліджувати розв'язність лінійних операторних рівнянь та будувати їх наближені розв'язки.

**Міждисциплінарні зв'язки:** базою для засвоєння функціонального аналізу є такі дисципліни: «Математичний аналіз», «Алгебра та геометрія». Використовується як сучасна математична мова в усіх математичних дисциплінах, зокрема в таких: «Диференціальні рівняння», «Рівняння математичної фізики», «Варіаційні методи», «Методи оптимізації», «Моделювання складних систем», «Теорії керування».

### **3. Програма навчальної дисципліни**

#### **Модуль 1.**

#### **Змістовий модуль 1. Метричні, нормовані та евклідові простори**

##### **Тема 1. Простори**

Нерівності Гьольдера та Мінковського. Метрика. Означення метричного простору. Приклади метричних просторів. Нормований простір. Приклади. Скалярний добуток. Евклідів простір. Евклідова норма. Властивості скалярного добутку та норми. Приклади. Ізометрія метричних просторів.

##### **Тема 2. Збіжність**

Границя послідовності елементів в метричному просторі. Зміст збіжності в конкретних метричних просторах. Властивості границі в метричному, нормованому, евклідовому просторах. Неперервні відображення метричних просторів. Еквівалентність норм в нормованому просторі.

##### **Тема 3. Топологія**

Відкрита та замкнена кулі в метричному просторі, окіл точки. Обмежена множина. Внутрішня, зовнішня та гранична точки множини. Відкрита та замкнена множини в метричному просторі. Операція замкнення, її властивості. Властивості відкритих та замкнених множин. Поняття топологічного простору. Всюди щільна та ніде не щільна множини. Канторова множина. Сепарабельний простір. Приклад несепабельного простору.

##### **Тема 4. Повнота**

Фундаментальна послідовність, її властивості. Повні метричні простори. Банахові та гільбертові простори. Повнота конкретних просторів. Принцип вкладених куль. Ряди в бананових просторах.

##### **Тема 5. Підпростори**

Підпростори нормованого простору. Приклади. Відстань елемента від підпростору. Елемент найкращого наближення. Теорема про елемент найкращого наближення до підпростору гільбертова простору. Теорема Ріса про «майже перпендикуляр». Ортогональне доповнення до лінійного многовида. Базис в нормованому просторі. Ортонормовані системи в гільбертовому просторі. Процес ортогоналізації. Многочлени Лежандра. Ряди Фур'є в гільбертовому просторі. Екстремальна властивість відрізка ряду Фур'є. Повні ортонормовані системи. Рівність Парсеваля. Критерії повноти ортонормованої системи в гільбертовому просторі.

##### **Тема 6. Компактність**

Компактні множини в метричних просторах. Приклади. Властивості компактних множин. Екстремальні властивості неперервних функцій на компактах. Критерій компактності Хаусдорфа та його наслідки. Критерій компактності в просторі неперервних функцій. Приклади. Локальна компактність в нормованому просторі.

#### **Модульний контроль**

## Модуль 2

### **Змістовий модуль 2. Лінійні функціонали і оператори в банахових і гільбертових просторах**

#### **Тема 7. Лінійні функціонали. Спряжені простори**

Означення лінійного функціоналу, його властивості. Неперервність та обмеженість лінійного функціонала, його норма. Спряжений простір. Загальний вигляд функціоналів в деяких нормованих просторах. Теорема Ріса про загальний вид функціонала в гільбертовому просторі. Узагальнений розв'язок крайової задачі. Ортогональне доповнення до множини в нормованому просторі. Теорема Хана – Банаха та її наслідки. Геометричне тлумачення.

#### **Тема 8. Лінійні оператори в банахових та гільбертових просторах**

Означення лінійного оператора в нормованому просторі. Приклади. Обмеженість та неперервність лінійного оператора. Норма оператора. Приклади. Простір лінійних обмежених операторів та типи збіжності в ньому. Принцип рівномірної обмеженості. Алгебра операторів. Ядро та образ оператора. Означення оберненого оператора. Критерій обмеженої оберненості лінійного оператора. Умови існування оператора  $(I - A)^{-1}$ . Теорема Банаха про обернений оператор. Спряжений оператор до обмеженого. Норма спряженого оператора. Лінійні цілком неперервні оператори, їх властивості. Приклади. Спряжений оператор до цілком неперервного оператора.

### **Змістовий модуль 3. Лінійні операторні рівняння**

#### **Тема 9. Лінійні операторні рівняння**

Рівняння зі стискаючим оператором. Теорема Банаха. Застосування до аналізу і побудови наближених розв'язків НСЛАР та інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Рівняння з компактним оператором. Теореми Фредгольма. Наближені методи розв'язання операторних рівнянь.

### **Модульний контроль**

#### 4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістовних модулів і тем	Кількість годин				
	Усього	У тому числі			
		л	п	лаб.	с. р.
1	2	3	4	5	6
<b>Модуль 1</b>					
<b>Змістовний модуль 1. Метричні, нормовані та евклідові простори</b>					
<b>Тема 1. Простори</b>	15	4	3		8
<b>Тема 2. Збіжність</b>	8	2	2		4
<b>Тема 3. Топологія</b>	9	3	2		4
<b>Тема 4. Повнота</b>	11	3	2		6
<b>Тема 5. Підпростори</b>	16	5	3		8
<b>Тема 6. Компактність</b>	11	3	2		6
<b>Модульний контроль</b>	2		2		
Разом за змістовним модулем 1	72	20	16		36
<b>Модуль 2</b>					
<b>Змістовний модуль 2. Лінійні функціонали і оператори в банахових і гільбертових просторах</b>					
<b>Тема 7. Лінійні функціонали. Спряжені простори</b>	22	6	4		12
<b>Тема 8. Лінійні оператори в банахових і гільбертових просторах</b>	36	10	6		20
Разом за змістовним модулем 2	58	16	10		32
<b>Змістовний модуль 3. Аналіз операторних рівнянь</b>					
<b>Тема 9. Лінійні операторні рівняння</b>	18	4	4	-	10
<b>Модульний контроль</b>	2		2		
Разом за змістовним модулем 3	20	4	6		10
<b>Усього годин</b>	150	40	32		78

#### 5. Теми семінарських занять

#### 6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Метричні та нормовані простори. Перевірка аксіом відстані та норми	2
2	Евклідові простори. Перевірка аксіом скалярного добутку	1
2-3	Границя послідовності в метричному та нормованому просторах.	2
3-4	Відкриті та замкнені множини в метричному просторі.	2
4-5	Повнота метричного простору.	2



5	Півпростори. Відстань елемента від підпростору.	1
6	Ортонормовані системи. Процес ортогоналізації. Ряди Фур'є в гільбертовому просторі.	2
7	Компактність.	2
8	Модульний контроль	2
9	Лінійні функціонали. Обмеженість. Норма функціонала.	2
10	Теорема Хана – Банаха	2
11	Лінійні оператори. Обмеженість. Норма оператора.	2
12	Ядро та образ оператора. Обернений оператор.	2
13	Спряжений оператор. Компактний оператор	2
14	Операторні рівняння зі стискаючим оператором	2
15	Компактні оператори в гільбертовому просторі. Наближені розв'язки операторних рівнянь.	2
16	Модульний контроль	2
	<b>Разом</b>	32

## 7. Теми лабораторних занять

### 8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	2	3
1	Простори. (Тема 1)	8
2	Збіжність. (Тема 2)	4
3	Топологія. (Тема 3)	4
4	Повнота. (Тема 4)	6
5	Підпростори. (Тема 5)	8
6	Компактність. (Тема 6)	6
7	Лінійні функціонали. Спряжені простори. (Тема 7)	12
8	Лінійні оператори в банахових і гільбертових просторах. (Тема 8)	20
9	Лінійні операторні рівняння. (Тема 9)	10
	<b>Разом</b>	78

### 9. Індивідуальні завдання

№ з/п	Назва теми
1	Виконання розрахункової роботи «Метричні, нормовані, евклідові простори. Лінійні функціонали і оператори. Наближений розв'язок операторних рівнянь»

## 10. Методи навчання

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, індивідуальні консультації, самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими кафедрою

## 11. Методи контролю

Проведення поточного контролю, письмового модульного контролю, фінальний контроль у вигляді іспиту.

## 12. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

12.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Складові навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
<b>Змістовний модуль 1</b>			
Робота на лекціях	0...0,5	10	0...5
Робота на практичних заняттях	0...2,5	7	0...17,5
Самостійна робота	0...1	7	0...7
Модульний контроль	0...24	1	0...24
<b>Змістовний модуль 2</b>			
Робота на лекціях	0...0,5	8	0...4
Робота на практичних заняттях	0...2,5	5	0...12,5
Самостійна робота	0...1	5	0...5
<b>Змістовний модуль 3</b>			
Робота на лекціях	0...0,5	2	0...1
Робота на практичних заняттях	0...2,5	2	0...5
Самостійна робота	0...1	2	0...2
Модульний контроль	0...24	1	0...24
Виконання та захист розрахункової роботи	0...10	1	0...10
<b>Всього за семестр(*)</b>			<b>0...117</b>

(\*) Якщо кількість модульних балів у студента перевищує 100, то в якості підсумкової оцінки виставляється 100 балів.

Семестровий контроль (іспит) проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску до іспиту. При складанні семестрового іспиту студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для іспиту/заліку складається з чотирьох питань (двох теоретичних і двох практичних). За кожне питання студент може одержати максимальну суму балів - 25.

### 12.2. Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки:

**Задовільно (60-74).** Оцінка ставиться, якщо студент знає загальні поняття метричних, банахових і гільбертових просторів, може навести їх приклади; знає означення і властивості відкритих і замкнених множин метричного простору; знає означення лінійних і обмежених функціоналів і операторів, знає критерій оберненості лінійного обмеженого оператора; вміє перевіряти аксіоми метрики, норми і скалярного добутку, перевіряти лінійність і обмеженість функціоналів і операторів, вміє розкласти елемент гільбертового простору за ортонормованою системою в узагальнений ряд Фур'є.

**Добре (75-89).** Оцінка ставиться, якщо студент, крім зазначеного вище, вільно володіє логіко-понятійним апаратом курсу, може обґрунтувати основні його положення (теореми Хана-Банаха, Ріса, Хаусдорфа, Банаха, Фредгольма), вміє знаходити норми лінійних обмежених функціоналів і операторів, досліджувати операторні рівняння на розв'язність.

**Відмінно (90-100).** Оцінка ставиться, якщо студент, має стійкі системні знання з дисципліни, вміє їх обґрунтовувати, узагальнювати та продуктивно їх використовує на творчому рівні. Задачі білету розв'язані та мають пояснення до кожного етапу розв'язання. Студент вільно володіє понятійним апаратом, вміє логічно мислити, аналізувати нестандартні ситуації. Має глибокі знання з теорії операторних рівнянь на основі властивостей лінійних операторів і векторних просторів, в яких вони діють. Вміє аналізувати операторні рівняння, знаходити їх наближені розв'язки, контролювати похибки таких наближень.

### 12.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

Протягом семестру студент отримує бали за накопичувальною системою згідно з таблицею наведеною в п. 12.1. Дано деякі пояснення до таблиці.

Робота на лекції – активна форма засвоєння матеріалу курсу: 0,5 бала ставиться за продумані питання, які студент задає лектору, участь в обговоренні предмета лекції, відповіді на питання, які по ходу лекції задає викладач. Активність студента може заохочуватися додатковими коефіцієнтами, які множаться на 0,5 бала.

Робота на практичному занятті оцінюється так: 1,5 бала за захист виконаного домашнього завдання, 2 бали за самостійно розв'язану задачу або 1 бал за розв'язану задачу за допомогою викладача, 2 бали за обґрунтовану відповідь на теоретичне питання з доведенням основних положень біля дошки.

Самостійна робота – 1 бал ставиться студенту за виконання домашнього завдання разом з його захистом в поза аудиторний час.

Індивідуальне завдання включає виконання та захист розрахункової роботи, яка складається з 5 задач за темами, означеними в назві роботи. За кожну задачу можна одержати максимально 2 бали.

Модульний контроль проводиться два рази на семестр на 8 і 16 тижнях на практичних заняттях. Білет для модульного контролю включає 4 питання (два теоретичних і два практичних). За відповідь на одне питання студент може отримати максимально 6 балів. Критерії оцінювання у відсотковому відношенні відповідають якісним критеріям з п. 12.2.

## Шкала оцінювання: бальна і традиційна

Сума балів	Оцінка за традиційною шкалою	
	Іспит, диференційований залік	Залік
90 – 100	Відмінно	Зараховано
75 – 89	Добре	
60 – 74	Задовільно	
0 – 59	Незадовільно	Не зараховано

### 13. Методичне забезпечення

#### Підручники, навчальні посібники, які видані в університеті :

1. Ніколаєв О.Г. Функціональний аналіз: підручник. – Х.: ХАІ, 2021.
2. Ніколаєв О.Г., Рвачова Т.В., Соловійов О.И. Функціональний аналіз. Навчальний посібник. – Х.: ХАІ, 2008.

**Електронний ресурс, на якому розміщено навчально-методичний комплекс дисципліни: //library.khai.edu. Комплекс включає в себе такі обов'язкові складові:**

- робоча програма дисципліни;
- конспект лекцій, підручники (навчальні посібники), в тому числі в електронному вигляді, які за змістом повністю відповідають робочій програмі дисципліни;
- методичні вказівки та рекомендації для виконання розрахункових та практичних робіт , а також рекомендації для самостійної підготовки;
- тематики індивідуальних завдань;
- приклади розв'язування типових задач чи виконання типових завдань;
- питання для контрольних заходів;

### 14. Рекомендована література

#### Базова

1. Ніколаєв О.Г. Функціональний аналіз: підручник. – Х.: ХАІ, 2021.
2. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. – Львів, 2014.
3. Федак І.В. Функціональний аналіз. Навч. посібник. – Івано-Франківськ, 2011.
4. Боярищева Т.В., Гудивок Т.В., Погоріляк О.О. Функціональний аналіз. Навч. посібник. – Ужгород, 2013.
5. Ус С.А. Функціональний аналіз: навч. посібник. – Дніпро: НГУ, 2013.

#### Допоміжна

1. Городецкий В.В., Нагибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. – К.: Выща школа, 1990.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: ВШ, 1982.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
5. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984.
6. Хатсон В., Пим Дж.С. Приложение функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.
7. Saxe K. Beginning Functional Analysis. – New York: Springer-Verlag, 2002.
8. Rynne B.P., Youngson M.A. Linear functional analysis. – London: Springer-Verlag, 2008

### **15. Інформаційні ресурси**

**Сайт бібліотеки** Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» <https://library.khai.edu>.