

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Морозов Андрій Володимирович

УДК 539.3:539.4+534.13+629.7

ДИСЕРТАЦІЯ

Метод визначення характеристик динаміки та міцності елементів конструкцій
авіаційних газотурбінних двигунів з композиційних матеріалів

Спеціальність 142 - Енергетичне машинобудування
Галузь знань 14 - Електрична інженерія

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і тестів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Морозов Андрій Володимирович

Науковий керівник
Кравченко Ігор Федорович,
доктор технічних наук, член-
кореспондент НАН України

Харків - 2025

АННОТАЦІЯ

Морозов А.В. Метод визначення характеристик динаміки та міцності елементів конструкцій авіаційних газотурбінних двигунів з композиційних матеріалів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 142 – «Енергетичне машинобудування» (14 Електрична інженерія) – Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, 2025.

Дисертаційна робота присвячена актуальному питанню розробки методу визначення характеристик динаміки і міцності авіаційних конструкцій, виготовлених з полімерних композиційних матеріалів (КМ) тривимірно армованої структури.

В роботі виконано аналіз проблеми впровадження деталей із композиційних матеріалів в конструкцію авіаційних двигунів на прикладі широкохордної лопатки вентилятора та лопаті повітряного гвинта (ПГ). Маючи низку переваг, у порівнянні з традиційними металевими конструкційними матеріалами, композити мають анізотропні властивості, що призводить до значного збільшення обсягу кваліфікаційних досліджень матеріалу. Визначення характеристик матеріалу, які використовуються в розрахунках на міцність конструкцій від дії статичних та динамічних навантажень реалізується за двома підходами – феноменологічним та теоретичним. Проведено обґрунтування використання теоретичних методів визначення характеристик пружності та міцності в композитах складної структури армування. Теоретичні методи дозволяють, крім визначення з високою точністю макроскопічних характеристик композиту прогнозувати динамічні характеристики та характеристики міцності конструкції за різних умов експлуатації, а також, оптимізувати просторову структуру композиту для розрахункових випадків навантаження.

Розроблено чисельний метод визначення ефективних пружних характеристик тривимірно армованих композиційних матеріалів за відомими властивостям структурних компонентів. Процедура гомогенізації базується на математичному

моделюванні представницького елемента об'єму, для якого визначено граничні умови. За допомогою проведення серії чисельних експериментів знайдено ефективні пружні характеристики гомогенного ортотропного матеріалу, еквівалентного тривимірно армованому КМ.

Створено аналітично-чисельний метод визначення параметрів квадратичного критерію міцності ортотропного тіла, який ураховує різницю меж міцності при розтягу та стиску. Розроблена процедура базується на математичному моделюванні представницького елемента об'єму тривимірно армованого КМ. Дев'ять з дванадцяти констант критерію однозначно визначаються по результатам одновісних експериментів на розтяг (стиск) та чистий зсув. Останні три константи розраховуються такими, щоб автоматично виконувалася умова існування поверхні міцності еліпсоїдного типу. За допомогою проведення серії чисельних експериментів визначено всі границі міцності та коефіцієнти критерію міцності гомогенного ортотропного матеріалу, еквівалентного тривимірно армованому КМ.

Описано загальну математичну постановку задачі теорії пружності для аналізу динамічних характеристик конструкцій. Проведено геометричне моделювання лопатки вентилятора та лопаті ПГ. Сформульовано повну систему рівнянь, що описує механічний стан тіла в межах підходу механіки суцільних середовищ. Методом скінчених елементів визначено напружено-деформований стан моделей лопатки й лопаті. Пружні характеристики матеріалу для моделей визначено чисельним методом по відомим властивостям компонентів композиту.

Виконано верифікацію моделі представницького елемента об'єму тривимірно армованого КМ шляхом проведення випробувань натурних зразків на розтяг і чистий зсув. Більша різниця у верифікації чисельного та експериментального дослідження становить – для модулів пружності 7,57 % (E_x), для границь міцності 6,13 % (σ_y^+).

Здійснено верифікацію моделі лопаті ПГ за допомогою експериментального дослідження перших п'яти власних форм і частот коливань натурної лопаті ПГ. Більша різниця у верифікації чисельного й експериментального дослідження становить 4,11 % для частоти четвертої форми коливань.

Наукова новизна дисертаційної роботи:

1. Розроблено новий метод визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів за відомими пружними властивостями структурних компонентів, який базується на математичному моделюванні представницьких елементів об'ємів для композиційних матеріалів різних структур армування. Визначено ефективні пружні сталі тривимірно армованого композиційного матеріалу.

2. Створено новий метод визначення параметрів критерію міцності композиційних матеріалів, який враховує різницю меж міцності на розтяг та стиск і базується на чисельно-аналітичному аналізі локальних напружень окремо для волокон і матриці. Визначено розрахункові границі міцності та коефіцієнти критерію міцності тривимірно армованого композиційного матеріалу.

3. Набув подальшого розвитку метод аналізу характеристик динаміки та міцності роторних деталей авіаційних газотурбінних двигунів виготовлених із композиційних матеріалів. Особливістю методу є те, що ефективні пружні характеристики композиційних матеріалів визначаються чисельним методом та використовуються для роторних деталей в якості розрахункових характеристик еквівалентного гомогенного ортотропного матеріалу, властивості якого задаються в локальних системах координат скінчених елементів в напрямку просторової геометрії конструкції.

Практичне значення отриманих результатів:

1. Запропонований метод чисельного визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів по відомим пружним властивостям структурних компонентів дозволив визначити характеристики матеріалів лопатки вентилятора і лопаті повітряного гвинта.

2. Запропонований метод чисельного визначення параметрів критерію міцності композиційних матеріалів, на базі аналізу локальних напружень, окремо для волокон і матриці, дозволив визначити усі границі міцності та коефіцієнти критерію міцності тривимірно армованого композиційного матеріалу.

3. Чисельне визначення ефективних пружних характеристик та параметрів критерію міцності композиційних матеріалів дозволило скоротити обсяг

експериментальних досліджень на установках АТ «Івченко-Прогрес», необхідних для отримання незалежних розрахункових характеристик матеріалу.

4. Розрахунок динамічних характеристик лопатки вентилятора та лопаті повітряного гвинта, дозволив на етапі проектування дослідити особливості напружено-деформованого стану деталей.

Отримані наукові результати можуть бути використані в організаціях, що спеціалізуються на дослідженні статичної та динамічної міцності конструкцій, виготовлених з КМ.

Ключові слова: авіаційний двигун, широкохордна лопатка вентилятора, лопать повітряного гвинта, композиційні матеріали, чисельний аналіз, метод скінченних елементів, представницький елемент об'єму, гомогенізація, анізотропія, ефективні пружні характеристики, параметри міцності.

Список публікацій здобувача.

1. Морозов А. В. Визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу. Вчені записки *Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського*. Серія: технічні науки. 2020. Т. 31. № 2. С. 44-51. DOI: 10.32838/2663-5941/2020.2-1/07.

2. Морозов А. В. Чисельне визначення ефективних пружних характеристик тривимірноармованого волокнистого композиційного матеріалу. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2020. № 8 (168). С. 121-129. DOI: 10.32620/aktt.2020.8.16.

3. Морозов А. В. Метод чисельного визначення динамічних характеристик лопаті повітряного гвинта з композиційного матеріалу. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2024. № 2 (194). С. 57-64. DOI: 10.32620/aktt.2024.2.06.

4. Morozov A. V., Lvov G. I. A Procedure for the Numerical Determination of the Strength Criterion Parameters of a Three-Dimensionally Reinforced Composite Material. *Strength Mater.* 2024. Vol. 56. № 1. DOI: 10.1007/s11223-024-00626-8.

5. Morozov A. V., Kravchenko I. F., Torba Yu. I., Lvov G. I. Dynamics numerical prediction for composite wide-chord fan blade. *IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology*. 2021. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570052.

ABSTRACT

Morozov A.V. A determination method of the characteristics of dynamics and strength of aircraft gas turbine engine structural elements made of composite materials. – A qualifying scientific work based on the manuscript.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Philosophy (PhD) in specialty 142 – “Energy Engineering” (14 Electrical Engineering) – National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, 2024.

The dissertation work is devoted to the topical issue of creating a method for determining the dynamics and strength characteristics of aircraft structures made of polymer composite materials (CM) of a three-dimensional reinforced structure.

The work analyzes the problem of implementing parts made of composite materials into the design of aircraft engines using, as the example, a wide-chord fan blade and a propeller blade. Having a number of advantages compared to traditional metal structural materials, composites have anisotropic material properties, which leads to a significant increase in the volume of material qualification studies. Determination of material characteristics, which are used in calculations of the strength of structures under the action of static and dynamic loads, is realized by two approaches – phenomenological and theoretical. The justification for the use of theoretical methods of finding elasticity and strength characteristics in composites of a complex reinforcement structure was carried out. In addition to finding the macroscopic characteristics of the composite with high accuracy, theoretical methods allow predicting the dynamic and strength characteristics of the structure under different operating conditions, as well as optimizing the spatial structure of the composite for the required load cases.

Based on the known properties of structural components, a numerical method for determination of the effective elastic characteristics of three-dimensionally reinforced composite materials has been developed. The homogenization procedure is based on mathematical modeling of a representative volume element, for which the boundary conditions are defined. By conducting a series of numerical experiments, the effective

elastic characteristics of the equivalent homogeneous orthotropic material for three-dimensionally reinforced CM were determined.

An analytical-numerical method for defining the parameters of the quadratic criterion of the strength of an orthotropic body, which takes into account the difference in strength limits at tension and compression, was created. The developed procedure is based on mathematical modeling of a representative volume element of three-dimensionally reinforced CM. Nine out of twelve constants of the criterion are unambiguously determined by the results of uniaxial experiments on tension (compression) and pure shear. The last three constants are calculated so that the condition for the existence of an ellipsoidal strength surface was automatically fulfilled. By conducting a series of numerical experiments, all strength limits and coefficients of the equivalent strength criterion of homogeneous orthotropic material for three-dimensionally reinforced CM were defined.

The general mathematical statement of the problem of elasticity theory for the analysis of dynamic characteristics of structures was described. Geometric modeling of the fan and propeller blades was carried out. A complete system of equations, that describes the mechanical state of the body within the framework of the continuum mechanics approach, was formulated. With the use of finite element method, the stress-strain state of the fan and propeller blade's models was determined. The elastic characteristics of the material for the models were determined by a numerical method based on the known properties of the composite components.

Verification of the model of the representative volume element of the three-dimensionally reinforced CM was carried out by conducting tensile and pure shear tests of natural samples. The higher difference in the verification of numerical and experimental research is 7.57% (E_x) for elastic modulus, 6.13% (σ_y^+) for strength limits.

Verification of the propeller blade model was performed by the means of an experimental study of the first five natural frequencies and vibration modes of a natural propeller blade. The higher difference in the verification of numerical and experimental research is 4.11% for the fourth vibration frequency.

Scientific novelty of the dissertation work:

1. A new method for determination of the effective elastic characteristics of composite materials based on the known elastic properties of structural components has been developed, which is based on the mathematical modeling of representative volume elements for composite materials of various reinforcement structures. The effective elastic properties of a three-dimensionally reinforced composite material have been determined.

2. A new method for determining the parameters of the strength criterion, which takes into account the difference between the tensile and compression strength limits, has been created and is based on the analysis of local stresses separately for fibers and matrix. The calculated strength limits and coefficients of the strength criterion of a three-dimensionally reinforced composite material have been determined.

3. The method of analyzing the dynamic characteristics of rotor parts of aircraft gas turbine engines made of composite materials has been further developed. The peculiarity of the method is that the effective elastic characteristics of composite materials are determined by the numerical method and are used for rotor parts as calculated characteristics of an equivalent homogeneous orthotropic material, the properties are specified in local coordinate systems of finite elements in the direction of the spatial geometry of the structure.

The practical significance of the obtained results:

1. The method of numerical determination of the effective elastic characteristics of composite materials according to the known elastic properties of structural components made it possible to determine the calculated characteristics of the fan blade and propeller blade materials.

2. The method for numerical determination of the strength criterion parameters of composite materials, based on the analysis of local stresses separately for fibers and matrix allowed to determine all the strength limits and coefficients of the strength criterion of a three-dimensionally reinforced composite material.

3. Numerical determination of the effective elastic characteristics and parameters of the strength criterion of composite materials made it possible to reduce the volume of experimental research at the equipment of the Ivchenko-Progress JSC, which are necessary for obtaining independent design characteristics of the material.

4. The calculation of the dynamic characteristics of the fan blade and propeller blade made it possible to investigate the specifics of the stress-strain state of the parts at the design stage.

The obtained scientific results can be used in organizations specializing in the study of static and dynamic strength of structures made of CM.

Keywords: aircraft engine, wide-chord fan blade, propeller blade composite materials, numerical analysis, finite element method, representative volume element, homogenization, anisotropy, effective elastic characteristics, strength parameters.

List of publications of the applicant.

1. Morozov A. V. Determination of effective elastic characteristics of unidirectional composite material. *Scientific notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series: Technical Sciences*. 2020. T. 31. No. 2. P. 44-51. DOI: 10.32838/2663-5941/2020.2-1/07. (in Ukrainian).

2. Morozov A. V. Numerical determination of effective elastic characteristics of three-dimensional fiber composite material. *Aerospace technic and technology*. 2020. No. 8 (168). P. 121-129. DOI: 10.32620/aktt.2020.8.16. (in Ukrainian).

3. Morozov A. V. Numerical determination method of dynamic characteristics for composite propeller blade. *Aerospace Technic and Technology. Aerospace technic and technology*. 2024. No. 2 (194). P. 57-64. DOI: 10.32620/aktt.2024.2.06. (in Ukrainian).

4. Morozov A. V., Lvov G. I. A Procedure for the Numerical Determination of the Strength Criterion Parameters of a Three-Dimensionally Reinforced Composite Material. *Strength Mater.* 2024. Vol. 56. No. 1. DOI: 10.1007/s11223-024-00626-8.

5. Morozov A. V., Kravchenko I. F., Torba Yu. I., Lvov G. I. Dynamics numerical prediction for composite wide-chord fan blade. *IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology*. 2021. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570052.

ЗМІСТ

ABSTRACT	6
ВСТУП.....	12
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД СТАНУ ПРОБЛЕМИ ВПРОВАДЖЕННЯ ДЕТАЛЕЙ АГТД З КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ	18
1.1 Науково-технічні проблеми створення конструкцій авіаційних газотурбінних двигунів з композиційних матеріалів	18
1.2 Методи визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів.....	24
1.2.1 Аналіз теоретичних методів гомогенізації композиційних матеріалів	26
1.2.2 Чисельні методи розрахунку ефективних пружних сталих композиційних матеріалів	34
1.2.3 Експериментальний метод визначення властивостей композиційних матеріалів	36
1.3 Критерії міцності композиційних матеріалів	39
1.4 Висновки з розділу	48
1.5 Література до першого розділу	49
РОЗДІЛ 2 МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ПРУЖНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ	60
2.1 Ефективні пружні властивості композиційних матеріалів	60
2.2 Чисельна гомогенізація пружних сталих композиційних матеріалів.....	62
2.2.1 Односпрямований композиційний матеріал.....	63
2.2.2 Двовимірно армований композиційний матеріал.....	72
2.2.3 Тривимірно армований композиційний матеріал.....	86
2.3 Висновки з розділу	93
2.4 Література до другого розділу	94
РОЗДІЛ 3 МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КРИТЕРІЮ МІЦНОСТІ ТРИВИМІРНО АРМОВАНОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ	96
3.1 Квадратичні критерії міцності ортотропних матеріалів	97
3.2 Чисельна процедура визначення параметрів критерію міцності.....	98

3.3 Результати чисельних експериментів	105
3.4 Висновки з розділу	113
3.5 Література до третього розділу	113
РОЗДІЛ 4 ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕТАЛЕЙ З КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ	115
4.1 Динамічні характеристики механічних систем	116
4.2 Скінченно-елементний підхід до розрахунку динамічних характеристик лопатки вентилятора	121
4.3 Чисельне визначення динамічних характеристик лопаті повітряного гвинта	137
4.4 Висновки з розділу	143
4.5 Література до четвертого розділу	144
РОЗДІЛ 5 ВЕРИФІКАЦІЯ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ І ВІДПОВІДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ	146
5.1 Експериментальне дослідження характеристик міцності та пружності зразків з композиційного матеріалу	146
5.2 Експериментальне дослідження динамічних характеристик лопаті повітряного гвинта	152
5.3 Висновки з розділу	156
5.4 Література до п'ятого розділу	157
ВИСНОВКИ	158
ДОДАТОК АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ДИСЕРТАЦІЇ	161

ВСТУП

Актуальність роботи. Створення сучасних перспективних авіаційних двигунів для літаків цивільної авіації пов'язано з розробкою економічних авіаційних газотурбінних двигунів зі збільшеним ступенем двоконтурності, які відрізняються габаритами робочих лопаток вентилятора. Використання безбандажних широкохордних лопаток вентилятора вирішує низку проблем, серед яких: збільшення аеродинамічної ефективності вентилятора, збільшення витрати повітря через вентилятор, покращення стійкості двигуна до враження сторонніми предметами, зменшення рівня шуму, зменшення кількості лопаток вентилятора та його маси. Унаслідок цього збільшуються надійність, ресурс, тяга й паливна ефективність двигуна.

Оскільки широкохордні лопатки вентилятора відрізняються великими габаритами та масою, виникає низка проблем, пов'язаних із забезпеченням їх міцності в нормальних і позаштатних умовах роботи двигуна. Ті ж проблеми мають і лопаті повітряних гвинтів, як схожі за призначенням та умовами роботи деталі. Вирішення цих проблем потребує використання нових конструкційних матеріалів, якими є композиційні матеріали. На сучасному етапі розвитку провідні двигунобудівні компанії в конструкціях робочих лопаток вентилятора та лопатей ПГ використовують полімерні КМ. Мала питома вага КМ, підвищена питома міцність і жорсткість призводять до низького рівня робочих напружень, що дозволяє розв'язати задачу створення високонапірних і високообертових лопаток вентиляторів перспективних авіаційних двигунів та лопатей ПГ.

Оскільки КМ є анізотропними, в разі збільшується кількість параметрів, що використовуються при проєктуванні деталей як незалежні розрахункові характеристики матеріалу. Отже, в разі збільшується обсяг обов'язкових теоретичних і експериментальних досліджень при формуванні характеристик матеріалу. Різними авторами запропоновано достатньо ефективні методи визначення потрібних характеристик, але для окремих структур КМ в заданих умовах роботи. Для складної структури КМ з можливістю оцінювання характеристик пружності та

міцності робочої лопатки вентилятора та лопаті ПГ виникає необхідність модернізації діючих методів аналізу та розроблення нових, більш універсальних методів.

Таким чином, проблема забезпечення статичної та динамічної міцності конструкцій, виготовлених із полімерних композитів тривимірної структури армування, є актуальною для авіаційного двигунобудування. Вирішення цієї проблеми дозволить визначати фізико-механічні властивості КМ і використовувати їх у розрахункових дослідженнях напружено-деформованого стану (НДС) високонавантажених роторних деталей АГТД, що створить науково-технічну основу для розробки перспективних авіаційних двигунів.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є розробка науково-обґрунтованого підходу для визначення характеристик динаміки та міцності роторних деталей авіаційних газотурбінних двигунів по відомим властивостям структурних компонентів композиційних матеріалів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- провести аналіз літературних джерел щодо проблеми забезпечення міцності роторних деталей АГТД виготовлених із КМ;
- теоретично дослідити сучасні підходи до визначення ефективних пружних характеристик та критеріїв міцності КМ;
- розробити нові методи визначення ефективних пружних характеристик і параметрів критерію міцності тривимірно армованого (3D) КМ;
- створити математичні моделі лопатки вентилятора й лопаті ПГ та визначити їх динамічні характеристики з ефективними пружними сталими 3D КМ;
- експериментально дослідити характеристики міцності та пружності на зразках з 3D КМ;
- виконати експериментальне дослідження форм, частот власних коливань і розподіл полів деформацій композитної лопаті ПГ.

Об'єкт дослідження – процеси деформування роторних деталей авіаційних газотурбінних двигунів, виготовлених з композиційних матеріалів.

Предмет дослідження – характеристики динаміки та міцності лопаток вентилятора та лопатей повітряних гвинтів, виготовлених з композиційних матеріалів тривимірної структури армування.

Методи дослідження. Достовірність та обґрунтованість результатів і висновків роботи забезпечена використанням наступних методів дослідження:

1. Методом моделювання створено математичні моделі – представницьких елементів об'єму КМ різної структури армування, лопатки вентилятора, лопаті ПГ.

2. Системний підхід, як метод, використано при комплексному дослідженні моделей лопатки вентилятора та лопаті ПГ. Застосована декомпозиція моделей дослідження на підсистеми мікрорівня, мезорівня, макрорівня, які досліджувались автономно з подальшим узгодженням із загальною системою.

3. Метод скінчених елементів використано для розрахунків при визначенні – ефективних пружних властивостей КМ різної структури армування; параметрів критерію міцності 3D КМ; розподілу напружень і деформацій лопатки вентилятора та лопаті ПГ.

4 Метод аналізу застосований з метою оцінювання напружено-деформованого стану конструкцій лопатки вентилятора та лопаті ПГ.

5. Тензометричним методом експериментально досліджено деформації тривимірно армованих зразків на розтяг та зсув.

6. Методом вільних коливань експериментально визначено власні частоти коливань лопаті повітряного гвинта.

7. Резонансним методом експериментально визначено резонансні частоти та форми коливань лопаті повітряного гвинта.

8. Метод порівняння застосований при верифікації результатів розрахункових і експериментальних досліджень.

Наукова новизна одержаних результатів:

1. Розроблено новий метод визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів за відомими пружними властивостями структурних компонентів, який базується на математичному моделюванні представницьких елементів об'ємів для композиційних матеріалів різних структур армування.

Визначено ефективні пружні сталі тривимірно армованого композиційного матеріалу.

2. Створено новий метод визначення параметрів критерію міцності композиційних матеріалів, який враховує різницю меж міцності на розтяг та стиск і базується на чисельно-аналітичному аналізі локальних напружень окремо для волокон і матриці. Визначено розрахункові границі міцності та коефіцієнти критерію міцності тривимірно армованого композиційного матеріалу.

3. Набув подальшого розвитку метод аналізу характеристик динаміки та міцності роторних деталей авіаційних газотурбінних двигунів виготовлених із композиційних матеріалів. Особливістю методу є те, що ефективні пружні характеристики композиційних матеріалів визначаються чисельним методом та використовуються для роторних деталей в якості розрахункових характеристик еквівалентного гомогенного ортотропного матеріалу, властивості якого задаються в локальних системах координат скінчених елементів в напрямку просторової геометрії конструкції.

Практичне значення отриманих результатів.

1. Запропонований метод чисельного визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів по відомим пружним властивостям структурних компонентів дозволив визначити розрахункові характеристики матеріалів лопатки вентилятора і лопаті повітряного гвинта.

2. Запропонований метод чисельного визначення параметрів критерію міцності композиційних матеріалів, на базі аналізу локальних напружень окремо для волокон і матриці дозволив визначити усі границі міцності та коефіцієнти критерію міцності тривимірно армованого композиційного матеріалу.

3. Чисельне визначення ефективних пружних характеристик та параметрів критерію міцності композиційних матеріалів дозволило скоротити обсяг експериментальних досліджень на установках АТ «Івченко-Прогрес», необхідних для отримання незалежних розрахункових характеристик матеріалу.

4. Розрахунок динамічних характеристик лопатки вентилятора та лопаті повітряного гвинта, дозволив на етапі проектування дослідити особливості напружено-деформованого стану деталей.

Практичне значення отриманих результатів підтверджено Актом про впровадження результатів дисертаційного дослідження (Додаток Б). Отримані наукові результати можуть бути використані в організаціях, що спеціалізуються на дослідженні статичної та динамічної міцності конструкцій, виготовлених з КМ.

Особистий внесок здобувача. Наукові положення, результати теоретичних і експериментальних досліджень, висновки та рекомендації, що виносяться на захист, отримані автором особисто. У дисертації відсутні результати, які належать співавторам, разом з якими опубліковано наукові статті.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися, обговорювалися і отримали позитивну оцінку на XXV Міжнародному конгресі авіадвигунобудівників (Україна, м. Харків, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», 2020 р.); Міжнародній науково-технічній конференції 2021 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (Україна, м. Харків, Національний технічний університет «ХПІ», 2021 р.).

Публікації. Основний зміст дисертації відображено в 4 статтях у фахових періодичних наукових виданнях України [1, 2, 3, 4], одне з яких [4] реферується в наукометричній базі даних Scopus, одній публікації [5] в неперіодичному виданні, яке реферується в наукометричній базі даних Scopus.

Усі положення наукової новизни дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У статтях написаних у співавторстві, проведення чисельних досліджень і аналіз результатів здійснені автором особисто; формулювання задач досліджень та висновків виконано з науковим керівником і частково за участю співавторів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, 5 розділів, висновків і списків використаних джерел до кожного розділу, загальних висновків, додатку. Загальний обсяг дисертації складає: 162 сторінок, 82 рисунків за текстом, 14 таблиць за текстом, 1 додаток на 2 сторінках, список використаних

джерел до кожного розділу, 148 найменувань використаних джерел сумарно, викладених на 16 сторінках.

Література до вступу

1. Морозов А. В. Визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу. Вчені записки *Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського*. Серія: технічні науки. 2020. Т. 31. № 2. С. 44-51. DOI: 10.32838/2663-5941/2020.2-1/07.
2. Морозов А. В. Чисельне визначення ефективних пружних характеристик тривимірноармованого волокнистого композиційного матеріалу. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2020. № 8 (168). С. 121-129. DOI: 10.32620/aktt.2020.8.16.
3. Морозов А. В. Метод чисельного визначення динамічних характеристик лопаті повітряного гвинта з композиційного матеріалу. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2024. № 2 (194). С. 57-64. DOI: 10.32620/aktt.2024.2.06.
4. Morozov A. V., Lvov G. I. A Procedure for the Numerical Determination of the Strength Criterion Parameters of a Three-Dimensionally Reinforced Composite Material. *Strength Mater.* 2024. Vol. 56. № 1. DOI: 10.1007/s11223-024-00626-8.
5. Morozov A. V., Kravchenko I. F., Torba Yu. I., Lvov G. I. Dynamics numerical prediction for composite wide-chord fan blade. *IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology*. 2021. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570052.

РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД СТАНУ ПРОБЛЕМИ ВПРОВАДЖЕННЯ ДЕТАЛЕЙ АГТД З КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

1.1 Науково-технічні проблеми створення конструкцій авіаційних газотурбінних двигунів з композиційних матеріалів

У роботі розглядаються дві конструкції з композиційних матеріалів:

1. Широкохордна лопатка вентилятора перспективного авіаційного двигуна.
2. Лопать повітряного гвинта, що застосовується на легких багатоцільових одно- або багатомоторних повітряних суднах, які обладнані авіаційними поршневыми або турбогвинтовими двигунами.

Лопатка вентилятора виготовлена за технологією Resin Transfer Molding (RTM), має структуру тривимірного просторового армування матриці вуглеволокном.

Лопать повітряного гвинта виготовлена методом комбінованого формування, поєднує ізотропні матеріали із структурою шаруватих композиційних матеріалів з просторовим армуванням за допомогою скло/вугле-тканини, скло-джгута, вугле-стрічки.

Оскільки композиційні матеріали мають певні переваги перед традиційними металевими конструктивними матеріалами, їх використання в аерокосмічній галузі поширюється.

Першу спробу використання композиційних матеріалів у конструкції лопатки вентилятора здійснила компанія Rolls Royce в червні 1967 р. для свого двигуна RB211. Вентилятор був цілком виготовлений з нового вуглеволоконного матеріалу з кодовою назвою Nufil розробкою якого займалися з 1964 р. [1]. Основна проблема використання лопаток вентилятора з композиційного матеріалу була пов'язана з низькою стійкістю до ударних навантажень (потрапляння в тракт двигуна сторонніх предметів, наприклад, птахів) і ці випробування в травні 1970 р. двигун не пройшов. Разом з тим, отримання досвіду й розробка методологічних підходів на етапах освоєння матеріалу нового класу, проведення комплексу кваліфікаційних, розрахункових, технологічних, експериментальних досліджень компонентів

матеріалу, зразків з композиційного матеріалу, готового виробу з полімерних КМ в різноманітних умовах експлуатації двигуна потребує багато часу. Висока вартість революційної на той час розробки вентилятора призвели до кризи проекту RB211. Одночасно в розробці знаходився запасний варіант вентилятора з порожніми титановими широкохордними лопатками, який після банкрутства та націоналізації компанії Rolls Royce на довгий час залишився основним, оскільки швидкі рішення для проблем використання композитних лопаток вентилятора не були знайдені.

На сучасному етапі розвитку двигунобудування компанія Rolls Royce пройшла повне коло в розробці концептуального проектування лопаток вентилятора й знову повернулася до рішення проблем застосування лопаток вентилятора з полімерних КМ.

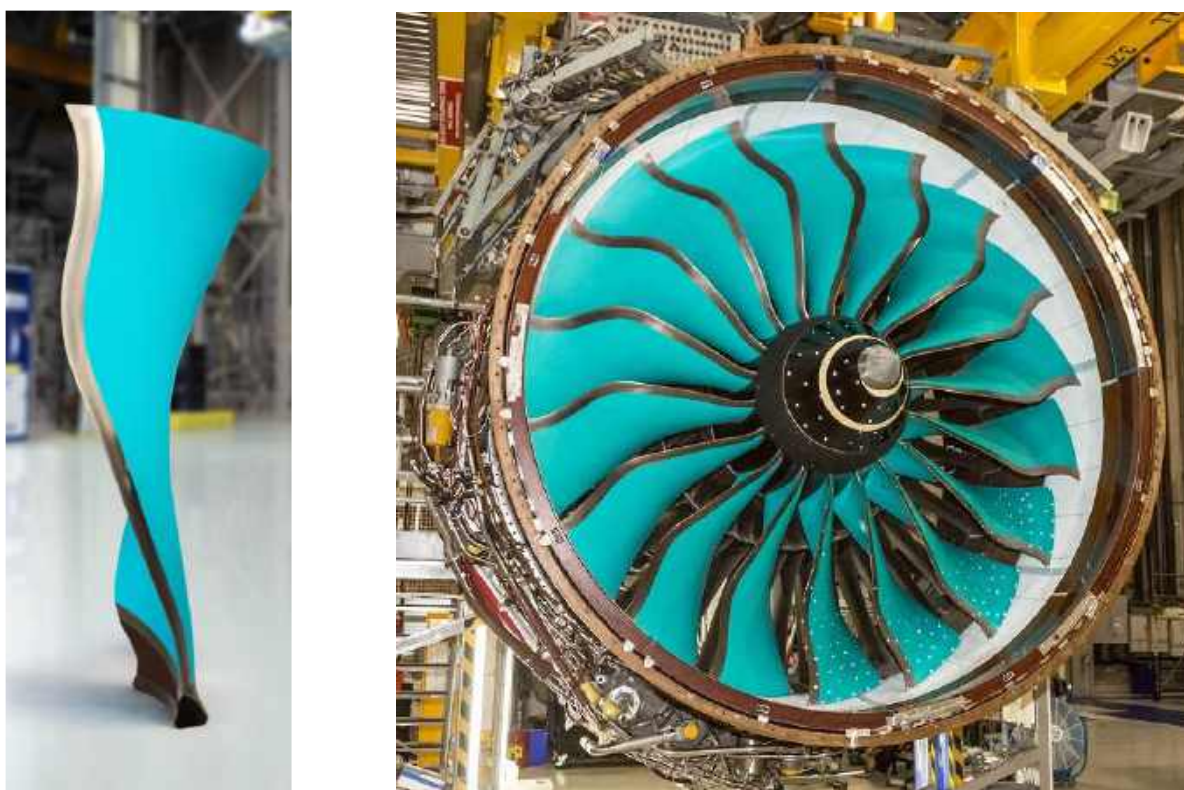


Рисунок 1.1. Удосконалена система низького тиску (Advanced Low Pressure System) в конструкції двигуна UltraFan® компанії Rolls Royce

Технологія виробництва базується на сучасних повністю автоматизованих методах конструювання. Ідентичність виробів гарантована завдяки роботизованому способу викладання шарів композиційного матеріалу (близько 500 шарів для кожної лопатки) [2].

Досвід у використанні деталей з КМ має компанія General Electric, яка вперше в 1995 р. сертифікувала двигун GE-90 з композитними лопатками вентилятора, виготовленими методом формування шарів композиційного матеріалу з просоченням в'язучого.

Спільне підприємство CFM International, куди входить GE Aviation і Safran Aircraft Engines (раніше Snecma), розробило сімейство перспективних турбовентиляторних двигунів LEAP-1A/B/C. Для авіаційного двигуна LEAP™ у співробітництві Albany Engineered Composites (AEC) і Safran розробили 3D композитні компоненти вентиляторного модуля [3].

Лопатка вентилятора з композиційного матеріалу є ключовою особливістю цього двигуна та передовою технологією щодо економії палива, економічності та інновацій.

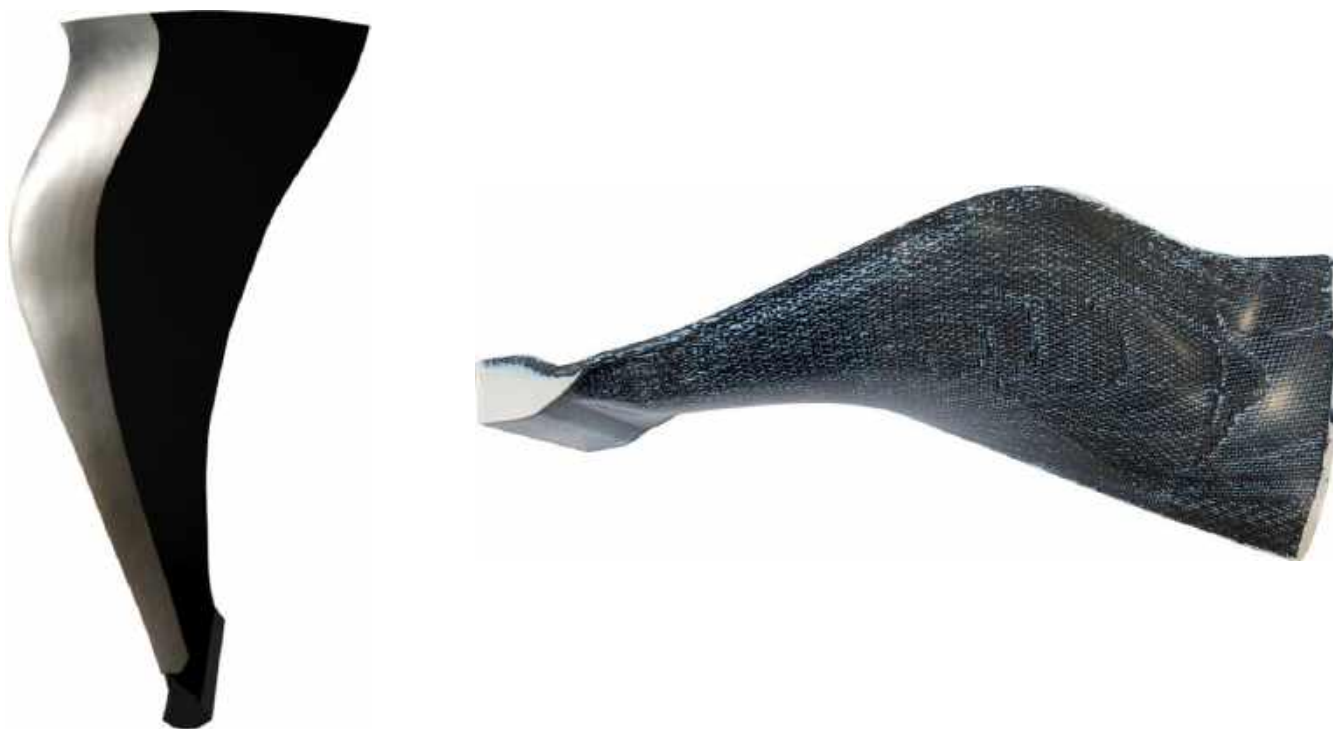


Рисунок 1.2. Лопатка вентилятора авіаційного двигуна LEAP™

3D композитна архітектура забезпечує структуру, яка є високостійкою до пошкоджень і здатна витримувати значні навантаження в різних площинах, завдяки чому композитне перо витримує удари птахів. Крім того, автоматизовані процеси, що використовуються у виробництві 3D-композиту, є більш надійними та економічно ефективнішими, ніж звичайний процес виготовлення ламінованої лопатки, оскільки для виготовлення потрібно менше ручної роботи.

Щодо повітряних гвинтів, то провідними лідерами розробки композитних лопатей є Hartzell Propeller, MT-Propeller, McCauley Propeller Systems.

Перші композитні лопаті Hartzell були сертифіковані для CASA 212 ще в 1978 р. Рання технологія з використанням системи викладки препрега стала проривом у галузі. У 2006 р. компанія Hartzell розробила та сертифікувала гвинт наступного покоління Advance Structural Composite ASC-II для Cirrus SR22T із вуглецевого волокна, використовуючи суху викладку. Hartzell ASC-II, – повітряний гвинт, який забезпечує малу вагу, малу інерцію та низькі витрати протягом життєвого циклу, водночас мінімізуючи вартість виробничого процесу. Композитні лопаті повітряного гвинта мають необмежений термін використання на різноманітних літальних апаратах, від поршневих літаків до військових тренажерів, особистих і бізнес-турбогвинтових двигунів, а також для вищого пілотажу та повітряних перегонів [4].



Рисунок 1.3. Повітряний гвинт Hartzell ASC-II

MT-Propeller традиційно виготовляє лопаті повітряних гвинтів із натуральних композиційних матеріалів. Історія першої лопаті з натурального композиту розпочалась у 1928 р. компанією Schwarz Propeller у Берліні. Спочатку повітряні

гвинти були розроблені для винищувачів, таких як FW190, Messerschmitt 109, Spitfire, Hurricane.

Згодом у виробництво була впроваджена нова технологія, розроблена MT-Propeller з використанням комп'ютерної томографії для попереднього вибору матеріалу та нових композиційних матеріалів, таких як вуглецеве волокно та скловолокно. Для збільшення потужності повітряного гвинта через збільшення коефіцієнту заповнення компанія сертифікувала 7-лопатевий гвинт Silent 7. Так, розпочав програму льотних випробувань 9-лопатевий гвинт та здійснив перший політ 11-лопатевий повітряний гвинт на PA31T з двигунами P&W PT6A-135A [5].



Рисунок 1.4. Перший 11-лопатевий повітряний гвинт MT-Propeller

Компанія McCauley Propeller Systems виготовляє повітряні гвинти для авіації загального призначення, спеціальних місій, безпілотних літальних апаратів і нових літальних апаратів з електричним вертикальним зльотом і посадкою (electric vertical take-off and landing – eVTOL). Після виходу Cessna Skycatcher компанія розробила та виготовила свій перший повітряний гвинт з композиційного матеріалу. Згодом компанія отримала сертифікат FAA на повітряний гвинт McCauley Black Mac Carbon.

Наступне покоління повітряних гвинтів з КМ почалося після завершення випробувань у аеродинамічній трубі гвинта C1106 для одномоторного турбогвинтового двигуна Beechcraft Denali. Після проведення повномасштабних і

модельних випробувань була отримана інформація про продуктивність і аеродинамічні характеристики, а також дані для розробки майбутніх концепцій гвинтів [6].



Рисунок 1.5. Повітряний гвинт C1106 McCauley Propeller Systems

Таким чином, світовий досвід впровадження композиційних матеріалів у конструкцію високонавантажених роторних деталей авіаційних двигунів має швидкий розвиток.

Відповідно до характеристик динаміки та міцності, використання композиційних матеріалів у конструкціях лопатки вентилятора та лопаті повітряного гвинта має низку переваг, серед яких:

- низька питома вага;
- висока питома міцність і жорсткість;
- висока втомна міцність;
- високі дисипативні властивості;
- можливість створення конструкції з необхідними характеристиками пружності та міцності, включаючи заходи відлаштування від резонансів.

Проблемою реалізації тенденції зростання впровадження композиційних матеріалів у аерокосмічній галузі є те, що підприємству потрібен певний рівень готовності технології та рівень виробничої готовності. Маючи досвід розробки, виготовлення та випробувань, статорних деталей авіаційних двигунів з

композиційних матеріалів підприємство АТ «Івченко-Прогрес», вводить в обіг роторні деталі з композиційних матеріалів власного виробництва.

Щодо проблем статичної та динамічної міцності, використання композиційних матеріалів у конструкції лопаток та лопатей, призводить до збільшення обсягу кваліфікаційних досліджень матеріалу, необхідних для визначення незалежних розрахункових характеристик матеріалу.

Експериментальне визначення деяких характеристик матеріалу представляє собою складну науково-технічну задачу. Отже актуальною є проблема створення верифікованих методів визначення ефективних пружних характеристик, параметрів критерію міцності композиційних матеріалів для проєктування конструкцій з КМ з потрібними характеристиками пружності та міцності.

Лопать ПГ і лопатка вентилятора – схожі за призначенням деталі, як рушії, що перетворюють потужність двигуна в тягу. Таким чином, підхід до аналізу міцності лопатки вентилятора та лопаті ПГ потребує визначення ефективних пружних характеристик та параметрів міцності КМ. Отже, потрібно знайти еквівалентний однорідний матеріал, який має таку ж ефективну жорсткість, що й реальний гетерогенний композит.

1.2 Методи визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів

Для аналізу напружено-деформованого стану конструкцій з композиційного матеріалу потрібна інформація про його пружні властивості. Існує два основних шляхи одержання ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів.

Перший – феноменологічний «фізичний» підхід – пов'язаний з експериментальними дослідженнями зразків виготовлених із композиційного матеріалу, що дозволяє визначити ефективні (еквівалентні, приведені, усереднені, макроскопічні) пружні характеристики матеріалу (ефективні модулі пружності), не зважаючи на його внутрішню структуру та вважаючи його однорідним анізотропним середовищем. Такий підхід використовує апарат теорії анізотропних середовищ у

розрахунках макроскопічних характеристик. Перевагою цієї наближеної теорії ефективних модулів є робота лише з однією системою рівнянь, що описує поведінку єдиного композиційного середовища, замість декількох систем рівнянь (для кожного компонента). При цьому немає можливості визначення полів напружень і деформацій у мікрооб'ємах композиційного матеріалу, зокрема на міжфазних границях [7, 8]. Експериментальне визначення пружних характеристик є складною і затратною технічною задачею, також у разі будь-якої зміни геометрії КМ (форми та структури), пружних та масових характеристик компонентів, об'ємного вмісту компонентів, технології виготовлення матеріалу – потребує повторного проведення всієї низки експериментів.

Другий – «математичний» підхід – використовує методи структурного аналізу та пов'язаний з теоретичним визначенням ефективних пружних характеристик по відомим властивостям вихідних компонентів і структури композиційного матеріалу. Цей підхід передбачає аналіз напружень і деформацій всередині компонентів та на міжфазних границях. Це дозволяє прогнозувати характеристики міцності та пружності для необхідних випадків навантажень і граничних умов, через що можливо оптимізувати та раціонально проєктувати структуру конструкції виготовленої з композиційного матеріалу.

Теоретичні основи механіки композиційних матеріалів можна класифікувати рівнем абстрагування, який визначається масштабом розмірів [9]. Мікрорівень – рівень структурної неоднорідності з характерним розміром частки наповнювача або діаметром волокна. Мезорівень – рівень на якому можлива заміна гетерогенного композиційного матеріалу еквівалентним йому гомогенним матеріалом. Макрорівень – рівень з масштабом характерного розміру конструкції виготовленої із композиційного матеріалу.

Основна задача механіки композиційних матеріалів полягає в обчисленні ефективних пружних характеристик по заданим характеристикам компонентів, для чого необхідний розгляд композиційного матеріалу на мікрорівні з наступним переходом на мезорівень. В подальшому, ефективні пружні характеристики

використовуються в розрахунках на міцність конструкцій від дії статичних і динамічних навантажень на макрорівні.

1.2.1 Аналіз теоретичних методів гомогенізації композиційних матеріалів

Класичним є метод знаходження усереднених матеріальних функцій на зразках з неоднорідного матеріалу в яких однорідний напружено-деформований стан розглядається тільки у середньому. Знайдені матеріальні функції описують ефективні визначальні співвідношення [10]:

$$\hat{\sigma} = \check{F}(\hat{\varepsilon}, \bar{x}) \quad \langle \hat{\sigma} \rangle = \check{f}(\langle \hat{\varepsilon}, \bar{x} \rangle); \quad (1.1)$$

$$\hat{\varepsilon} = \check{G}(\hat{\sigma}, \bar{x}) \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \check{g}(\langle \hat{\sigma}, \bar{x} \rangle), \quad (1.2)$$

де $\hat{\sigma}$ – тензор напружень;

$\hat{\varepsilon}$ – тензор деформацій;

$\check{F}$ – деякий оператор, тензор другого рангу;

$\check{G}$ – обернений $\check{F}$ оператор;

$\bar{x}$ – координати точок тіла;

$\langle \dots \rangle$ – середні значення величин.

Композиційний матеріал має періодичну структуру, якщо операторні співвідношення є періодичними функціями координат:

$$\check{F}(\hat{\varepsilon}, \bar{x}) = \check{F}(\hat{\varepsilon}, \bar{x} + n_i \bar{a}_i); \quad (1.3)$$

$$\check{G}(\hat{\sigma}, \bar{x}) = \check{G}(\hat{\sigma}, \bar{x} + n_i \bar{a}_i), \quad (1.4)$$

де $\bar{a}_i$ – постійні вектори, що визначають період структури;

n_i – довільні цілі числа.

Метод має назву теорії ефективних модулів і не дозволяє здійснювати аналіз НДС всередині відокремлених компонентів композиційного матеріалу.

Фундаментальні основи методів визначення механічних характеристик полікристалів закладені Фойгтом (Voight) [11, 12] і Реуссом (Reuss) [13], також названі правилом суміші (rule of mixtures) [14]. Процедура усереднення по Фойгту припускає, що композиційний матеріал знаходиться в умовах постійної деформації

(iso-strain), по Реуссу – постійного напруження (iso-stress). Ці оцінки являють собою середнє арифметичне та середнє гармонічне характеристик компонентів КМ:

$$E_{eff}^V = \sum_{i=1}^n f_i E_i ; \quad E_{eff}^R = \left(\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{E_i} \right)^{-1}, \quad (1.5)$$

де f_i – об’ємна концентрація компоненти композиційного матеріалу;
 n – число компонент.

Занадто спрощені моделі Фойгта та Реусса узагальнюють прості одновимірні моделі паралельного та послідовного з’єднання пружних елементів відповідно (рис. 1.6).

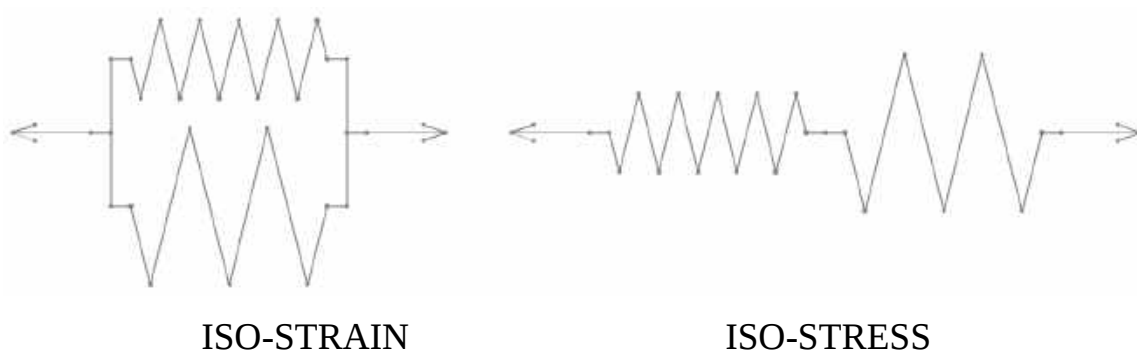


Рисунок 1.6. Схематичне зображення моделей Фойгта та Реусса

Недоліки цього підходу: використання схеми Фойгта надає завищену оцінку ефективного пружного модуля, а схеми Реусса – занижену.

Уточнення меж Фойгта–Реусса є актуальною задачею механіки композиційних матеріалів. Суттєвий вклад у розв’язок даної задачі внесли Хашин і Штрікман [15, 16]. Їх підхід базується на варіаційному принципі для анізотропного неоднорідного середовища й дозволяє визначити більш вузькі межі ефективних модулів. Особливістю цього методу є збіжність верхньої та нижньої межі у разі рівності модулів зсуву компонентів КМ.

Хілл в роботах [17, 18] запропонував при визначенні ефективних модулів використовувати гіпотезу рівності макроскопічної величини густини енергії деформації всього об’єму гетерогенного матеріалу середній величині густини енергії деформації всіх елементів цього об’єму. Також він запропонував, що найбільш вірогідним значенням ефективних модулів є середнє значення співвідношень (1.5).

Інтегральні співвідношення Ешелбі [19, 20] мають важливе значення для аналізу гетерогенних середовищ і визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів з включеннями. Поле деформацій всередині еліпсоїдального включення є рівномірним і визначається тільки формою включення, а зв'язок між «стиснутою» $\boldsymbol{\varepsilon}^C$ та «вільною від напружень» $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ деформацією здійснюється за допомогою компонент тензора Ешелбі $\mathbf{S}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^C = \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}^T. \quad (1.6)$$

Схематично проблему Ешелбі зображено на рис. 1.7. Всередині нескінченного ізотропного пружного середовища видаляється еліпсоїдальне включення, яке зазнає змінення форми та розмірів, та зводиться до безнапруженої власної однорідної деформації $\boldsymbol{\varepsilon}^T$. Для збереження первісної форми до включення прикладається навантаження $\bar{\mathbf{F}}$. Далі включення повертається в початкову порожнину середовища. Після зняття прикладеного навантаження включення навантажує середовище $\bar{\mathbf{R}} = -\bar{\mathbf{F}}$ і деформується вимушеною $\boldsymbol{\varepsilon}^C$ деформацією, внаслідок чого у включенні та в зовнішньому середовищі з'являються напруження.

Підхід Ешелбі узагальнюється для довільного анізотропного матеріалу, а компоненти тензора приводяться до комбінації поверхневих інтегралів, які шляхом параметризації зводяться до звичайних інтегралів.

Використовуючи рішення Ешелбі задачу одиночного включення можливо розв'язати в замкненій формі. Деформація всередині включення $\boldsymbol{\varepsilon}_I$ є однорідною й пов'язана з тензором однорідної макродеформації $\mathbf{E}$ наступним чином:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbf{A}_I \mathbf{E}, \quad (1.7)$$

де $\mathbf{A}_I$ – тензор концентрації деформації одиночного включення четвертого рангу, що визначається, як:

$$\mathbf{A}_I = \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{C}_M)^{-1}(\mathbf{C}_I - \mathbf{C}_M) \right]^{-1}, \quad (1.8)$$

де $\mathbf{I}$ – одиничний тензор четвертого рангу;

$\mathbf{S}$ – тензор Ешелбі;

$\mathbf{C}_I, \mathbf{C}_M$ – функції пружних сталих включення й матриці.

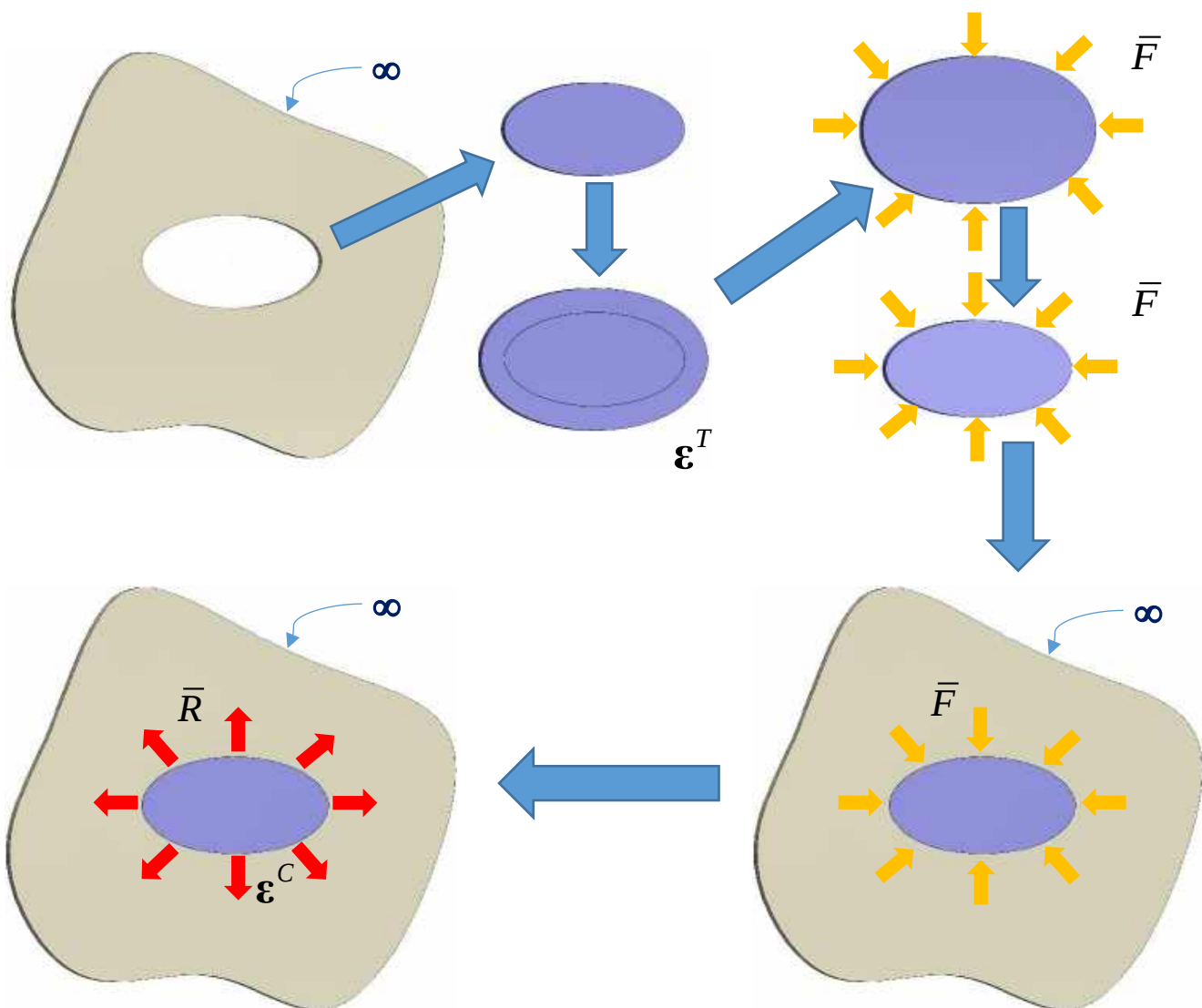


Рисунок 1.7. Схематичне зображення проблеми Ешелбі

Метод Морі-Танака, в якому включення розподілені в матриці [21], дозволяє отримати аналітичні оцінки ефективних властивостей, що базуються на вирішенні задачі Ешелбі для ізольованого включення.

У відповідній моделі складові рівняння армованого волокнами композиту виражаються через середню деформацію та напруження за формулою:

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{C}_{eff} \langle \varepsilon \rangle. \quad (1.9)$$

Ефективний тензор пружності [22] визначається як:

$$\mathbf{C}_{eff} = (\mathbf{V}_M \mathbf{C}_M + \mathbf{V}_I \mathbf{C}_I \mathbf{A}_I) (\mathbf{V}_M \mathbf{I} + \mathbf{V}_I \langle \mathbf{A}_I \rangle)^{-1}, \quad (1.10)$$

де $\mathbf{V}_M$, $\mathbf{V}_I$ – об'ємні частки матриці й включення.

Метод самоузгодження передбачає, що включення взаємодіє з еквівалентним однорідним середовищем з ефективними пружними властивостями композита. Тензор концентрації деформації (1.8) змінюється на:

$$\mathbf{A}_I = [\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{C}_M)^{-1}(\mathbf{C}_I - \mathbf{C}_{eff})]^{-1}. \quad (1.11)$$

Ефективні пружні характеристики розраховуються за допомогою ітерацій:

$$\mathbf{C}_{eff} = \langle \mathbf{C}_I \mathbf{A}_I \rangle_V = \sum_{I=0}^N V_I \mathbf{C}_I \mathbf{A}_I. \quad (1.12)$$

Метод самоузгодження застосовується для визначення ефективних пружних характеристик полікристалічних і композиційних матеріалів [23].

У методі подвійного включення [24, 25] еліптична неоднорідність I вкладена в еліптичну однорідну область M з утворенням подвійного включення W , яке оточене нескінченним однорідним середовищем (рис. 1.8). Поле деформацій всередині подвійного еліпсоїдального включення не є рівномірним (на відміну від випадку з одиночним включенням). Середні об'ємні значення деформацій I та M можна оцінити за допомогою узагальненого підходу Ешелбі.

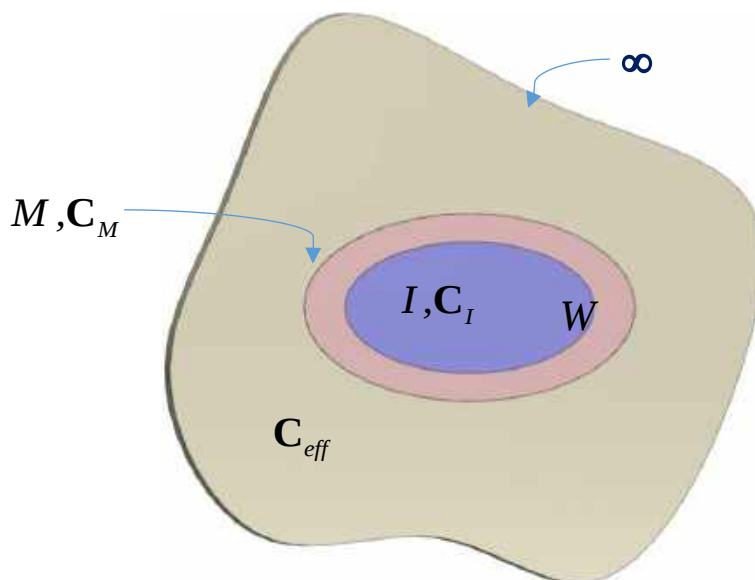


Рисунок 1.8. Схематичне зображення подвійного включення з трьома фазами

Тензор пружних сталей подвійного включення визначається як

$$\mathbf{C}_W = \mathbf{C}_{eff} \{ \mathbf{I} + (\mathbf{S}_W - \mathbf{I}) \mathbf{A}_W \} \{ \mathbf{I} + \mathbf{S}_W \mathbf{A}_W \}^{-1}, \quad (1.13)$$

де $\mathbf{A}_W$ – тензор концентрації деформації подвійного включення:

$$\mathbf{A}_W = V_I \mathbf{A}_I + (1 - V_I) \mathbf{A}_M. \quad (1.14)$$

Цей метод враховує взаємодію, як між неоднорідністю W і нескінченним однорідним середовищем, так і між включенням I та однорідною областю M . Фактично, за допомогою метода подвійного включення можливо застосувати схеми різних моделей гомогенізації середнього поля в залежності від вибору C_{eff} .

Міжфазне пошкодження анізотропної матриці та включення розглянуто в [26]. Отримано простий алгебраїчний вираз модифікованого тензора Ешелбі для сферичного включення, укладеного в довільну пружну анізотропну матрицю, через три тензорні величини (одиничний тензор четвертого порядку, тензор пружної жорсткості та тензор Ешелбі) та дві скалярні величини (радіус включення й міжфазна пружна стала) у випадку, коли міжфазне пошкодження моделюється як лінійно-пружний шар. Цей вираз перевірено для кристала триклінної сингонії, що включає 21 незалежну пружну константу, порівняно з аналізом методом скінчених елементів.

Дослідження композитних матеріалів стохастичної структури базується на застосуванні методів теорії випадкових функцій [27]. Цей підхід дозволяє досліджувати поведінку компонентів гетерогенного середовища за допомогою апаратів механіки суцільних середовищ, механіки деформованого твердого тіла та чисельних методів і розглядати процеси в гетерогенному середовищі, як у однорідному. Оцінки макроскопічних властивостей багатокомпонентних стохастичних композиційних матеріалів можна зробити методами статистичної механіки на основі даних про функції розподілу локальних ефективних характеристик [28].

Композиційні матеріали стохастичної структури на мікрорівні можна представити, як середовище з ефективними характеристиками поля переміщень, деформацій, напружень, які представлені у вигляді статистично однорідних кусково-постійних функцій координат. Ці функції залежать від радіусу-вектора та розкладаються на регулярну середню складову й флуктуації, наприклад, поле деформації виражається як

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \langle \varepsilon_{ij}(\vec{r}) \rangle + \varepsilon'_{ij}(\vec{r}). \quad (1.15)$$

Таким чином поля переміщень, деформацій, напружень враховують статистичний розкид властивостей компонентів і випадковість їх взаємного розташування.

Щільність розподілу статистично однорідного поля випадкових величин залежить тільки від відносного розташування точок у просторі, та не залежить від положення в просторі цієї групи точок. У разі дії зовнішніх сил на стохастично неоднорідне тіло виникають випадкові тензорні поля деформацій/напружень, які можна характеризувати багатоточковими щільностями розподілу та відповідним їм моментами. Найпростіші з них – це моменти першого та другого порядку, тобто математичне сподівання та кореляційна функція. Ефективні пружні характеристики стохастично армованих композиційних матеріалів розраховуються на основі моментів першого порядку, деформації/напруження в компонентах – на основі моментів більш високого порядку [29].

У [30] розглянуто аналітичні вирази для моментів мікроструктурних деформацій/напружень у компонентах неоднорідних твердих тіл, що отримані у другому наближенні розв'язку крайової задачі для пружнопластичного випадку. Показано, що інтегральні рівняння для моментів першого та другого порядку залежать від багатоточкових структурних моментних функцій з точністю до п'ятого порядку. За допомогою методу функцій Гріна крайова задача зводиться до інтегродиференційного стохастичного рівняння в флуктуаціях переміщень. Ітераційна процедура встановлює зв'язок між деформаціями в компонентах та макроскопічними деформаціями. Результати чисельних досліджень дозволили визначити залежності деформування композиту від дисперсності та об'ємної частки включень.

У [31] досліджено композиційний матеріал, який складається з однорідної матриці та статистично однорідних нееліпсоїдальних включень з різними безнапруженими власними деформаціями. Запропоновано нове представлення перших статистичних моментів поля напружень у виражених фазах через усереднені граничні інтеграли по межах включення. Ці інтеграли представляють флуктуації, внесені одним включенням всередині нескінченної матриці та оцінюються за

допомогою фундаментальних розв'язків базисних функцій. Збільшення об'ємної частки включень може призводити до зміни знака оцінених локальних залишкових напружень.

Варіант методу асимптотичного усереднення для шаруватих нелінійно-пружних нестисливих композиційних матеріалів, що мають скінченну деформацію та періодичну структуру запропоновано в [32]. Розроблений алгоритм дозволяє розраховувати ефективні діаграми деформування, що пов'язують компоненти середніх тензорів напруження Піоли-Кирхгофа та градієнт деформацій.

У роботі [33] запропоновано метод асимптотичного усереднення для визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів. Процеси в середовищах з періодичною структурою визначаються диференційними рівняннями в часткових похідних із змінними (швидко осцилюючими) коефіцієнтами. Розв'язок знаходиться у вигляді рядів по степеням малого параметра з коефіцієнтами, що залежать від повільних змінних (належать до глобальної системи координат) та швидких змінних (належать до локальної системи координат). Оскільки у вихідних рівняннях визначений малий параметр, цей метод можливо вважати методом розкладання по малому параметру.

У статті [34] гомогенізацію на основі мікромеханіки розглянуто стосовно до різних фізичних явищ, включаючи пружність, тепло- і електропровідність, електричну та магнітну поляризацію, а також до явищ з пов'язаними рівняннями, такими як п'єзоелектрика та термоелектрика. У роботі представлено дослідження із визначення ефективних фізичних властивостей з урахуванням анізотропії матриці та міжфазних дефектів. Ґрунтуючись на математичній аналогії, показано, що рівняння гомогенізації середнього поля для різних фізичних явищ можна представити лінійними рівняннями, які включають симетричні матриці з різною розмірністю в нотації Манделя.

Односпрямовані композиційні матеріали трьох різних типів досліджено в [35] експериментально та за допомогою мікромеханічного підходу за правилом суміші. Визначено ефективні пружні сталі матеріалів, з припущеннями ідеального зв'язку матриці та волокон у порівнянні з експериментом. Спосіб виявився ефективним для

оцінювання поздовжнього модуля пружності та малоефективним для оцінювання поперечного модуля та модулів зсуву.

У роботі [36] запропоновано підхід до визначення ефективних характеристик односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, періодично армованого двома типами волокон, з урахуванням транстропних властивостей матриці та волокон. На основі моментної схеми скінченного елемента побудовано матрицю жорсткості тривимірного скінченного елемента композиційного матеріалу з урахуванням просторового армування волокнами. Розвинуто чисельні підходи до врахування геометричної нелінійності волокнистого композиційного матеріалу із застосуванням моментної схеми скінченного елемента для дослідження напружено-деформованого стану силових елементів з волокнистих композитів.

1.2.2 Чисельні методи розрахунку ефективних пружних сталих композиційних матеріалів

Чисельні методи визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів мають давню історію. Завдяки простоті фізичної інтерпретації найпопулярнішим на сьогодні у дослідженнях механіки суцільних середовищ є метод скінчених елементів (МСЕ). Він дозволяє здійснювати розрахункові дослідження процесів у середовищах довільної структури, але потребує розробки спеціальних підходів до чисельного моделювання цих процесів.

У статті [37] представлено результати дослідження ефективних пружних характеристик представницького елемента об'єму еластомірних композитів засновано при чисельному розв'язанні крайових задач нелінійної теорії пружності. Ефективні властивості оцінюються у вигляді квадратичної залежності між усередненими напруженнями та деформаціями. Чисельні розрахунки проведено за допомогою програмного модулю Fidesys Composite із використанням методу скінчених елементів та методу спектральних елементів. Досліджено залежності ефективних властивостей еластоміру від просторової орієнтації часток наповнювача та від ступеня наповнення.

У дослідженнях [38, 39] з метою розробки композиту (поліетилен надвисокої молекулярної маси армований поліпропіленом), механічні властивості матеріалу визначено за допомогою теоретичного аналізу (правило суміші й рівняння Гоббса) та аналізу методом скінчених елементів. Базуючись на математичному підході, модуль пружності, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона були розраховані аналітично та за допомогою МСЕ відповідно до об'ємної частки наповнювача. Рівняння Гоббса дало результати з більш подібною тенденцією до результатів МСЕ, ніж модель сформована за правилом суміші.

Методику чисельного дослідження механічної поведінки та прогнозування ефективних механічних властивостей стохастичних композиційних матеріалів за умов високошвидкісного деформування при ударно-хвильовому навантаженні з урахуванням еволюції структури композитів представлено в [40, 41].

У роботі [42] запропоновано чисельний підхід для прогнозування поведінки пружно-пластичних і в'язко-пружно-пластичних КМ армованих довгими волокнами від дії багатоосьового навантаження. Мікромеханічна модель заснована на модифікованому багатомасштабному підході гомогенізації середнього поля. Метод гомогенізації – комбінована схема Морі-Танака з аналізом поля трансформацій. Для оцінювання локальних полів деформацій/напружень між волокнами та матрицею введена третя фаза. Цей підхід дозволяє вирішити проблему значних локальних деформацій/напружень між волокнами та матрицею, які присутні при використанні класичних методів гомогенізації.

Методи гомогенізації нанопористих КМ досліджено в [43]. Поверхневі ефекти враховувались при розрахунку гомогенізованих модулів і поверхневих напружень. Поверхневі ефекти моделювалися по теорії Гуртіна-Мердока [44] за концепцією нескінченної тонкої поверхні з власними модулями пружності та умовами рівноваги. Теорія точної локальної гомогенізації дає повний набір гомогенізованих модулів та відповідних локальних полів напружень у нанокомпозитів різної структури. Іншою теорією гомогенізації є підхід мікромеханіки прямого усереднення скінченного об'єму. Отримано результати, спрямовані на демонстрацію впливу об'ємної частки нанопор, радіусів і масивів на гомогенізовані модулі та локальні поля напружень.

Процедура дворівневої гомогенізації представницького елемента об'єму для аналізу тривимірних КМ методом скінчених елементів представлена в роботах [45, 46].

У рамках дослідження [47] описано модель на основі схеми Морі-Танака, що містить недосконалі включення. Ця модель має можливість імітувати фазу роз'єднання всередині аналітичної схеми гомогенізації та може бути застосовна до будь-якої геометрії включення, якщо можна визначити її модифікований тензор Ешелбі. Надалі виконано порівняння моделі з чисельною двовимірною коміркою періодичності, розрахованою методом скінчених елементів.

1.2.3 Експериментальний метод визначення властивостей композиційних матеріалів

Феноменологічний підхід до визначення ефективних пружних характеристик КМ дозволяє враховувати в чисельних експериментах низку припущень:

1. Міжфазна межа має ідеальний контакт, тобто описується безперервністю переміщень і поверхневих напружень між волокном і матрицею.
2. Компоненти композиційного матеріалу однорідні й лінійно-пружні.
3. Волокна розподілені регулярно та рівномірно.

Технологічні дефекти, пов'язані з культурою виробництва КМ зазвичай прагнуть мінімізувати, але на стадії вибору компонентів КМ від різних виробників, опанування або створення технології виготовлення нових матеріалів саме експериментальний метод дозволяє врахувати всі неточності. Експериментальний метод потрібен для:

1. Підтвердження виконання вимог до характеристик матеріалу.
2. Контролю якості виробу та процесу виробництва.
3. Порівняння властивостей матеріалів між собою.

Стандарти, що застосовуються для лінійно-пружних ізотропних однорідних матеріалів, наприклад ASTM E111, ASTM E9, ASTM E132 [48-50], недостатні для повної ідентифікації пружних сталей КМ. Тому при випробуваннях композиційних матеріалів відображають окремі сценарії навантаження стандартних зразків. Через

сильну залежність властивостей від напрямку армування здійснюються різні види навантаження зразків з різними напрямками їх вилучення.

Організації, що займаються стандартизацією розробили низку методів, які дозволяють визначати характеристики композиційних матеріалів при різних видах навантаження. Випробування КМ описуються міжнародними стандартами (ISO), регіональними стандартами (ДСТУ, ASTM, DIN, BSI, AFNOR, ГОСТ) а також методами випробувань корпорацій (Airbus AITM, Boeing BSS), що призводить до значного обсягу характерних методів випробувань. Опанування тих чи інших стандартів пов'язано з наявністю прецизійного обладнання для точного співвісного навантаження, належних пристосувань для утримання зразків, а також точного вимірювання деформацій.

Значний обсяг різноманітних стандартів надає можливість вибору серед них найбільш придатних для випробування. Стандарти різняться за практичними аспектами:

1. Просторова структура, компоненти, технологія виготовлення композиційного матеріалу.
2. Форма та розміри зразків.
3. Умови закріплення зразків.
4. Вид навантаження – розтяг, стиск, зсув, вигін, кручення, комбіноване.
5. Напрямок навантаження – одноосьове, двохосьове, багатоосьове.
6. Швидкість навантаження – статичне, квазістатичне, динамічне (ударне, циклічне).
7. Температурні умови випробування.
8. Умови навколишнього середовища.
9. Вимоги до точності обладнання.
10. Алгоритм визначення результатів випробування.

Також стандарти розділяються за керівними принципами у випробуваннях. Для випробувань КМ на розтяг в стандарті ISO 527 [51-54] керівним принципом є високий ступінь порівняння результатів дослідження в межах дослідної лабораторії, компанії, країни. Мета аналогічного стандарту ASTM D638 [55] – прагматичне визначення

механічних властивостей армованих та неармованих пластмас. Якщо полімерні КМ армовані високомодульними волокнами то використовується стандарт ASTM D3039/D3039M [56]. Для полімерних КМ, які виготовлені методом намотки безперервних високомодульних волокон при розтягу перпендикулярно до площини армування, застосовується ASTM D5450/D5450M [57]. Багатошарові полімерні КМ, матриця яких армована дискретними або безперервними волокнами при розтягу зразка у напрямку товщини, випробуються по стандарту ASTM D7291/D7291M [58].

Для випробувань КМ на стиск використовуються міжнародні стандарти ISO 604, ISO 844, ISO 18352 [59-61] або регіональні стандарти ASTM 695, ASTM D3410/D3410M, ASTM D5449/D5449M, ASTM D5467/D5467M, ASTM D6641/D6641M, ASTM D7137/D7137M, ASTM D7956/D7956M, ASTM E2954 [62-69].

Випробування готових виробів, структурних фрагментів та комплексних конструкцій орієнтується на фактичні навантаження, що виникають у процесі експлуатації виробів, та потребує розробки специфічних методик випробувань. В якості розробників виступають різноманітні організації.

Експериментальне дослідження КМ різних типів (рапортів) плетіння описано в роботі [70]. Механічні випробування на розтяг, стиск і твердість, проводилися відповідно до стандартів ASTM. Композиційні матеріали полотняного переплетення показали кращі механічні властивості порівняно з саржевим переплетенням.

Простий метод визначення пружних сталих ламінованих композиційних матеріалів наведено в статті [71]. Дані отримано в результаті випробувань зразків на осьове навантаження, деформації вимірювалися за допомогою тензорезисторів.

Серед безконтактних оптичних методів аналізу напружено-деформованого стану КМ широке застосування отримав метод цифрової кореляції зображень (digital image correlation) [72–80]. Цей метод застосовує одну, дві, або багато цифрових камер, зображення з яких аналізуються за локальними та глобальними алгоритмами кореляції [81]. Метод DIC відрізняється простотою використання та високою точністю вимірювання повного поля деформацій на поверхні, однак не може забезпечити повне розуміння поведінки 3 D композиційних матеріалів. Натомість технічно складний метод цифрової об'ємної кореляції (digital volume correlation)

пропонує за допомогою мікрокомп'ютерної томографії можливість тривимірного вимірювання внутрішніх деформацій КМ [82, 83].

Оптичний метод муарових полос (moiré method) також використовується для визначення деформацій на поверхні КМ [84-88].

Таким чином, експериментальне визначення характеристик композиційного матеріалу – складна технічна задача. До її переваг відноситься врахування технологічних неточностей при виробництві КМ. До її недоліків відноситься неможливість визначення локальних полів напружень і деформацій у мікрооб'ємах композиційного матеріалу (волокнах, матриці, міжфазних границях), неможливість експериментального визначення деяких незалежних пружних характеристик матеріалу, необхідність проведення низки експериментів у разі будь-яких змін в конструкції.

1.3 Критерії міцності композиційних матеріалів

Для оцінювання міцності композиційних матеріалів необхідні критерії, що задають умови роботи матеріалу без руйнування. Міцність композиційних матеріалів визначається міцністю матеріалів компонентів, адгезією між ними, топологією армування (властивості матеріалу відповідно просторової геометрії конструкції) та ін. Критерії міцності пов'язують границі міцності композиційного матеріалу, що визначаються при розтягу, стиску в основних напрямках та чистому зсуву в основних площинах властивостей матеріалу, з характеристиками напружено-деформованого стану. Математично критерії міцності представлено функціями компонентів тензора напружень або деформацій і характеристиками міцності матеріалу.

Геометричною інтерпретацією критерію є гранична поверхня міцності в координатному просторі $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$), яка задає допустимі границі напружень/деформацій, є замкненою та має початок координат всередині поверхні. При заданому навантаженні комбінація напружень/деформацій визначає координати точки тіла, якщо точка оточується поверхнею міцності

(знаходиться всередині області), то руйнування не відбувається, якщо точка лежить за межами поверхні міцності, то вважається, що сталося руйнування.

Всі критерії міцності передбачають тільки початок руйнування, подальша деградація властивостей матеріалу потребує використання методів механіки пошкоджень (damage mechanics).

Дослідження задачі, щодо моделювання механізмів руйнування композиційних матеріалів проводиться на основі двох підходів.

При феноменологічному підході композиційні матеріали розглядаються як макрооднорідні та анізотропні середовища з певною симетрією властивостей, математична модель яких є аналітичною апроксимацією експериментальних результатів без пояснення механізмів, що визначають поведінку матеріалу. Перевагою підходу є відносна простота обчислень. Однак для композиційних матеріалів з різною схемою армування потрібно визначення емпіричних коефіцієнтів кожен раз на основі нових експериментальних даних.

Структурний підхід враховує гетерогенну мікроструктуру композиційних матеріалів та використовує експериментальні дані лише для базових складових, які можна варіювати для різного поєднання елементів матеріалу. Створення та застосування структурного підходу супроводжують значні труднощі, що не завжди дозволяє отримати більш точні результати порівняно з феноменологічним підходом.

Надалі будуть приведені найбільш поширені в інженерній практиці критерії міцності композиційних матеріалів.

Серед феноменологічних критеріїв міцності найточнішими є тензорно-поліноміальні. Вони враховують взаємний вплив компонентів деформацій або напружень і характеризуються інваріантністю щодо координатних осей. Загальне формулювання критерію для тривимірного випадку з використанням матричної форми записів тензорних співвідношень (нотація Фойгта) має вигляд [89]:

$$\left(F_i \sigma_i\right)^{\alpha} + \left(F_{ij} \sigma_i \sigma_j\right)^{\beta} + \left(F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k\right)^{\gamma} + \dots \leq 1, \quad i, j, k \dots = 1, 2, \dots, 6, \quad (1.16)$$

де $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ – компоненти тензора напруження;

$F_i, F_{ij}, F_{ijk} \dots$ – компоненти тензорів міцності другого, четвертого, шостого та наступних вищих парних рангів;

α, β, γ – безрозмірні коефіцієнти, що визначаються експериментально.

Критерій, в якому показники ступеня в (1.16) прийняті рівними одиниці, отримав назву тензорно-поліноміального критерію міцності:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots \leq 1. \quad (1.17)$$

Також, слід враховувати, що підвищення порядку полінома призводить до суттєвого ускладнення умов міцності та необхідністю визначення цілого ряду констант міцності, тому при практичному застосуванні обмежуються лінійними та квадратичними доданками виразу (1.17) [90]:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j \leq 1. \quad (1.18)$$

Дана підмножина інтерактивних критеріїв, названих квадратичними не містить надлишкових параметрів, враховує відмінність границь міцності при розтягу та стиску, а також залежність міцності від напрямку дотичних напружень при зсуві [91].

У розгорнутому вигляді квадратичний критерій Цая-Ву для ортотропного матеріалу в системі координат, в якій координатні осі перпендикулярні до площин симетрії пружних властивостей ортотропного матеріалу (основна система), виражено у вигляді:

$$\begin{aligned} & F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 + F_{44} \tau_{12}^2 \\ & + F_{55} \tau_{13}^2 + F_{66} \tau_{23}^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 \leq 1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Непов'язані коефіцієнти $F_1, F_2, F_3, F_{11}, F_{22}, F_{33}, F_{44}, F_{55}, F_{66}$ однозначно визначаються з експериментів при одновісному розтягу, стиску, чистому зсуву і мають значення:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}; & F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}; & F_3 = \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c}; \\ F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}; & F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}; & F_{33} = \frac{1}{Z_t Z_c}; \\ F_{44} = \frac{1}{Q^2}; & F_{55} = \frac{1}{R^2}; & F_{66} = \frac{1}{S^2}, \end{cases} \quad (1.20)$$

де X_t, Y_t, Z_t – границі міцності при розтягу в основних напрямках 1, 2, 3 відповідно;
 X_c, Y_c, Z_c – границі міцності при стиску в основних напрямках 1, 2, 3 відповідно;
 Q, R, S – границі міцності при зсуві в основних площинах 23, 13, 12 відповідно.

Пов'язані коефіцієнти F_{12}, F_{23}, F_{13} не можуть бути отримані на основі результатів експериментів по руйнуванню при одновісному напруженому стані, для отримання їх значень необхідно проведення випробувань при напруженому двовісному стані. На сьогодні існує серйозна нестача експериментальних даних з отримання цих параметрів.

Узагальнений критерій Мізеса [92] для ортотропного матеріалу, умови міцності якого при стиску, розтягу та чистому зсуві не залежать від напрямку дотичних напружень та в основній системі координат має вигляд:

$$\begin{aligned} F_1\sigma_1^2 + F_2\sigma_2^2 + F_3\sigma_3^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + \\ + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + 4F_{12}\tau_{12}^2 + 4F_{13}\tau_{13}^2 + 4F_{23}\tau_{23}^2 \leq 1, \end{aligned} \quad (1.21)$$

або в тензорному записі:

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j \leq 1 \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.22)$$

Для ортотропних матеріалів, які практично не руйнуються при всебічному стиску, використовується критерій міцності Хілла [93, 94]. Цей критерій приймається у вигляді квадратичної функціональної залежності компонентів напруження, але форма запису умови міцності при цьому інша. Вважаючи, що найпростіша умова руйнування ортотропного матеріалу зводиться до умови теорії питомої потенційної енергії формозмінення Хілл пропонує наступний запис квадратичної функції компонентів напруження в основній системі координат:

$$F_1(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + F_2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + F_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2F_4\tau_{12}^2 + 2F_5\tau_{13}^2 + 2F_6\tau_{23}^2 \leq 1, \quad (1.23)$$

де F_i ($i = 1 \dots 6$) – коефіцієнти міцності, що характеризують анізотропію матеріалу (визначаються експериментально).

О. Хоффман модифікував критерій Хілла з урахуванням відмінності міцності матеріалу при розтягу та стиску [95]:

$$\begin{aligned} F_1(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + F_2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + F_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + F_4\sigma_1 + \\ + F_5\sigma_2 + F_6\sigma_3 + F_7\tau_{23}^2 + F_8\tau_{13}^2 + F_9\tau_{12}^2 \leq 1, \end{aligned} \quad (1.24)$$

де F_i ($i = 1 \dots 9$) – коефіцієнти міцності, що характеризують анізотропію матеріалу (визначаються експериментально).

Критерій міцності Цая-Хілла, що є узагальненням критерію Мізеса, може бути представлено у вигляді [96, 97]:

$$\begin{aligned} & (G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - \\ & - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 \leq 1, \end{aligned} \quad (1.25)$$

де

$$\begin{aligned} 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}; \\ 2G &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}; \\ 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Значення X^2 , Y^2 , Z^2 приймаються в залежності від знака нормального напруження уздовж відповідної осі з умови:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \geq 0 &\Rightarrow X = X_t; & \sigma_1 < 0 &\Rightarrow X = X_c; \\ \sigma_2 \geq 0 &\Rightarrow Y = Y_t; & \sigma_2 < 0 &\Rightarrow Y = Y_c; \\ \sigma_3 \geq 0 &\Rightarrow Z = Z_t; & \sigma_3 < 0 &\Rightarrow Z = Z_c. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Наступні критерії максимальних напружень і деформації [98] вказують, що руйнування відбувається, коли одна з характеристик матеріалу досягає свого граничного значення незалежно від величин інших характеристик. Функції критеріїв міцності визначено у вигляді:

$$f = \max\left(\frac{\sigma_1}{X}, \frac{\sigma_2}{Y}, \frac{\sigma_3}{Z}, \frac{\tau_{12}}{S}, \frac{\tau_{13}}{R}, \frac{\tau_{23}}{Q}\right), \quad (1.28)$$

$$f = \max\left(\frac{\varepsilon_1}{X_\varepsilon}, \frac{\varepsilon_2}{Y_\varepsilon}, \frac{\varepsilon_3}{Z_\varepsilon}, \frac{\gamma_{12}}{S_\varepsilon}, \frac{\gamma_{13}}{R_\varepsilon}, \frac{\gamma_{23}}{Q_\varepsilon}\right), \quad (1.29)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} -X_c \leq \sigma_1 \leq X_t \\ -Y_c \leq \sigma_2 \leq Y_t \\ -Z_c \leq \sigma_3 \leq Z_t \\ \tau_{12} \leq Q \\ \tau_{13} \leq R \\ \tau_{23} \leq S \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} -X_{\varepsilon c} \leq \varepsilon_1 \leq X_{\varepsilon t} \\ -Y_{\varepsilon c} \leq \varepsilon_2 \leq Y_{\varepsilon t} \\ -Z_{\varepsilon c} \leq \varepsilon_3 \leq Z_{\varepsilon t} \\ \gamma_{12} \leq Q_{\varepsilon} \\ \gamma_{13} \leq R_{\varepsilon} \\ \gamma_{23} \leq S_{\varepsilon} \end{array} \right. . \quad (1.30)$$

Структурні критерії відрізняють руйнування волокон (fiber failure – FF), руйнування матриці (inter-fiber failure – IFF) та порушення межі розділу матриця-волокно (delamination).

Один з них – критерій міцності Хашина [99, 100]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{R} \right)^2 \leq 1, \quad (1.29)$$

для волокна при розтягу вздовж волокон;

$$\frac{\sigma}{X_c} \leq 1, \quad (1.30)$$

для волокна при стиску вздовж волокон;

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y_t} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{Q} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{R} \right)^2 \leq 1, \quad (1.31)$$

для матриці при розтягу поперек волокон;

$$\left(\frac{\sigma_2}{2Q} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{Q} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{R} \right)^2 + \left[\left(\frac{Y_c}{2Q} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_2}{Y_c} \leq 1, \quad (1.32)$$

для матриці при стиску поперек волокон;

$$\left(\frac{\sigma_3}{Z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{Q} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{R} \right)^2 \leq 1, \quad (1.33)$$

для розшарування під час розтягу або стиску.

А. Пак одним із перших запропонував ідею, в якій руйнування волокон при розтягу і стиску описується аналогічно критерію максимального напруження, та руйнування волокон і руйнування матриці повинні розглядатися за різними критеріями [101, 102].

Простий та модифікований критерії Пака передбачають руйнування уздовж волокон аналогічно критерію максимального напруження.

Руйнування матриці для простого критерію Пака:

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 \leq 1 \quad (1.34)$$

де

$$\begin{cases} \sigma_1 \geq 0 \Rightarrow X = X_t \\ \sigma_1 < 0 \Rightarrow X = X_c \\ \sigma_2 \geq 0 \Rightarrow Y = Y_t \\ \sigma_2 < 0 \Rightarrow Y = Y_c \end{cases} \quad (1.35)$$

Руйнування матриці для модифікованого критерію Пака:

$$\frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\tau_{12}}{S^2} + \left(\frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}\right) \sigma_2 \leq 1 \quad (1.34)$$

Особливість критерію площадок дії (action planes) Пака [103-105] в тому, що для руйнування матриці введено параметр, який характеризує кут нахилу площадки руйнування. Цей критерій ґрунтується на гіпотезі Кулона і Мора для крихких матеріалів, оскільки внутрішньосферове руйнування більшості композиційних матеріалів є крихким. Також враховується факт того, що стискаючі напруження перпендикулярно волокнам прагнуть уникнути руйнування, а розтягуючі напруження уздовж волокон сприяють руйнуванню.

Критерій руйнування матриці за Паком визначено в трьох компонентах $\sigma_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}, \tau_{\parallel\perp}$ (символи позначають напрямки паралельний волокнам і перпендикулярний волокнам), які відносяться до циліндричної системи координат і відповідних їм характеристик міцності матеріалу, що визначаються на площадках руйнування, які пропорційні п'яти компонентам $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ в прямокутній декартовій системі координат згідно з рівнянням:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\perp\perp}(\theta_{fp}) \\ \tau_{\perp\parallel}(\theta_{fp}) \\ \tau_{\perp\perp}(\theta_{fp}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ -sc & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}, \quad (1.34)$$

де $c = \cos \theta_{fp}$, $s = \sin \theta_{fp}$ – кут нахилу площадки руйнування.

У разі міжволоконного руйнування критерій Пака представлено у вигляді:

$$\left(\frac{\tau_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 + (1-c) \left(\frac{\sigma_{\perp}}{R_{\perp}^{tA}} \right)^2 + c \left(\frac{\sigma_{\perp}}{R_{\perp}^{tA}} \right) \leq 1, \quad (1.35)$$

де R – параметри опору руйнуванню для матриці при розтягу поперек волокон;

$$\left(\frac{\tau_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}^A + p_{\perp\perp}^A \sigma_{\perp}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}^A + p_{\perp\parallel}^A \sigma_{\perp}} \right)^2 \leq 1, \quad (1.36)$$

де p – параметри нахилу кривих руйнування для матриці при стиску поперек волокон.

Також у інженерних розрахунках використовуються критерії LaRC (NASA Langley Research Center) [106, 107], Кунце (Cuntze) [108, 109].

Таким чином, наразі немає єдиного критерію, який описує всі випадки деформації та руйнування композиційного матеріалу, що робить цю проблему важливою та відкритою для дослідження [110].

Узагальнюючи вищевикладене можна зазначити, що конструкція основних деталей авіаційних двигунів з КМ, до яких належать лопатка вентилятора та лопать ПГ, повинна забезпечувати їх бездефектну роботу впродовж призначеного їм ресурсу за встановленими умовами експлуатації. Дослідження починається з визначення характеристик КМ, які в подальшому використовуються для аналізу статичної та динамічної міцності деталей.

Загальну схему методів дослідження характеристик динаміки та міцності роторних деталей авіаційних газотурбінних двигунів виготовлених із КМ представлено на рис. 1.

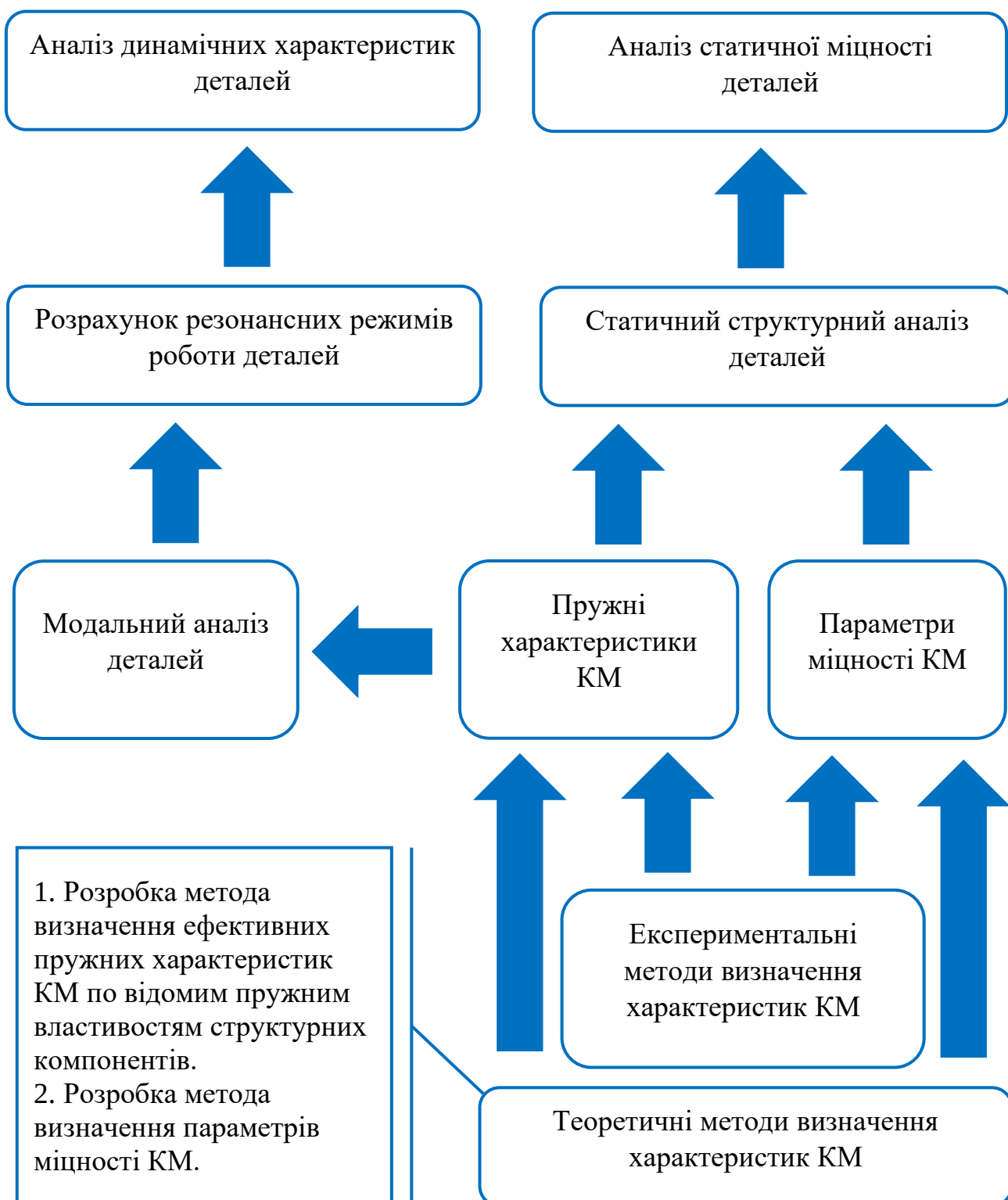


Рисунок 1.9. Схематичне зображення методів дослідження деталей з КМ на міцність

1.4 Висновки з розділу

За результатами аналізу літературних джерел можна зробити наступні висновки:

1. Композиційні матеріали, що мають низку переваг у порівнянні з традиційними металевими матеріалами, використовуються провідними світовими компаніями при виготовленні високонавантажених роторних деталей авіаційних двигунів. Для виготовлення конкурентоспроможної продукції підприємству АТ «Івченко-Прогрес» потрібно вирішити складну науково-технічну задачу по проектуванню та виготовленню широкохордної лопатки вентилятора та лопаті повітряного гвинта з композиційних матеріалів.

2. Для визначення характеристик динаміки та міцності деталей з КМ за результатами аналізу об'ємного напружено-деформованого стану на стадії проектування потрібна інформація про властивості матеріалу, яку можна отримати з експериментів. Експериментальне визначення характеристик композиційного матеріалу – складна технічна задача, яка дорого коштує. До її недоліків відноситься неможливість визначення локальних полів напружень і деформацій у мікрооб'ємах композиційного матеріалу, неможливість експериментального визначення деяких незалежних пружних характеристик матеріалу, необхідність проведення низки експериментів у разі будь-яких змін в конструкції.

3. Теоретичні методи обчислення ефективних пружних характеристик та параметрів критерію міцності по відомим властивостям компонентів і структури армування композиційного матеріалу більш інформативні. Вони дозволяють крім визначення з високою точністю макроскопічних характеристик композиту прогнозувати динамічні характеристики та характеристики міцності конструкції за різних умов експлуатації, а також, оптимізувати просторову структуру композиту для необхідних випадків навантаження. Це відкриває додаткові можливості для створення композитних конструкцій, орієнтованих на специфічні види навантажень та граничних умов. Вибір компонентів КМ та його структури для кожного випадку експлуатації, дозволяє вдосконалити характеристики конструкцій та значно скоротити час на їх розробку. Тому розробка нових ефективних спеціалізованих

чисельних методів визначення напружено-деформованого стану моделей конструкцій з композиційних матеріалів є актуальною науково-технічною задачею.

1.5 Література до першого розділу

1. Whitney I. Hyfil limited: The manufacture of Hyfil carbon fiber. *Composites*, 1973. Vol. 4, Issue 3. P. 101-104.
2. Rolls-Royce UltraFan one step closer as Advanced Low Pressuru System (ALPS) testing gets underway. URL: <http://rolls-royce.com/media/press-releases/2019/25-02-2019> (дата звернення: 03.12.2022).
3. Safran and Albany International extend strategic cooperation on advanced Composites. URL: https://www.safran-group.com/pressroom/safran-and-albany-international-extend-strategic-cooperation-advanced-composites-2021-11-30#_ftn1 (дата звернення: 03.12.2022).
4. Meet the unlimited life propeller blade. URL: <https://hartzellprop.com/unlimited-life-propeller-blade/> (дата звернення: 23.02.2023).
5. MT-Propeller – decades of Innovation in aircraft propeller development and manufacturing. URL: https://www.mt-propeller.com/en/entw/about_firsts.htm (дата звернення: 27.04.2023).
6. About McCauley Propeller Systems. McCauley propels Beechcraft Denali forward, completes wind tunnel testing. URL: <https://mccauley.txtav.com/en/mccauley-media/media-detail> (дата звернення: 27.04.2023).
7. Karpinos D.M. Composite Materials Handbook. Kyiv. Naukova Dumka, 1985. 592 p. (in Russian).
8. Mechanics of Composite Materials, edited by G.P. Sendeckyj. Composite materials, 1974. Vol. 2. New York. Academic Press. 503 p.
9. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of Multilayer Structures, 1980. Moscow. Mashinostroyeniye. 375 p. (in Russian).
10. Pobedrya B.Ye. Mechanics of Composite Materials, 1984. Moscow. MGU. 336 p. (in Russian).

11. Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Wied. Ann*, 1889. Vol. 38. P. 573-587.
12. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Berlin: Teubner, 1928. 962 p.
13. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1929. Vol. 9. № 1. P. 49-58. DOI: 10.1002/zamm.19290090104.
14. Harris B. *Engineering Composite Materials*. The Institute of Materials. London, 1999. 194 p.
15. Hashin Z., Shtrikman S. A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1963. Vol. 11. P. 127-142. DOI: 10.1016/0022-5096(63)90060-7.
16. Hashin Z. On some variational principles in Anisotropic and Nonhomogeneous Elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1962. Vol. 10. P. 835-842. DOI: 10.1016/0022-5096(62)90004-2.
17. Hill R. The Elastic Behavior of a Crystalline Aggregate. *Proceedings of the Physical Society*, 1965. Vol. A65. P. 349-354. DOI: 10.1088/0370-1298/65/5/307.
18. Hill R. Self-Consistent Mechanics of Composite Materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1965. Vol. 13. P. 213-222. DOI: 10.1016/0022-5096(65)90010-4.
19. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1957. Vol. 241. № 1226. P. 376-396. DOI: 10.1098/rspa.1957.0133.
20. Eshelby J. D. Elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1959. Vol. 252, № 1271. P. 561-569. DOI: 10.1098/rspa.1959.0173.
21. Mori T. Tanaka K. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1973. Vol. 21. P. 571-574. DOI: 10.1016/0001-6160(73)90064-3.

22. Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 1987. № 6. P. 147-157. DOI: 10.1016/0167-6636(87)90005-6.
23. Nunziato J. W., Cowin S. C. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1979. Vol. 72. P. 175-201.
24. Hori M., Nemat-Nasser S. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. *Mechanics of Materials*, 1993. Vol. 14. P. 189-206. DOI: 10.1016/0167-6636(93)90066-Z.
25. Nemat-Nasser S., Hori M. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Elsevier Science, 1993. 786 p.
26. Lee S., Lee J., Ryu S. Modified Eshelby tensor for an anisotropic matrix with interfacial damage. 2018. DOI: 10.1177/1081286518805521.
27. Buryachenko V.A. *Micromechanics of heterogeneous materials*. Springer, 2007. 686 p.
28. Tashkinov M., Wildemann V., Mikhailova N. Method of successive approximations in stochastic elastic boundary value problem for structurally heterogeneous materials. *Computational Materials Science*, 2012. Vol. 52. P. 101-106. DOI: 10.1016/j.commatsci.2011.04.025.
29. Saheli G., Garmestani H., Adams B.L. Microstructure design of a two-phase composite using two-point correlation functions. *Journal of Computer-Aided Materials Design*, 2004. Vol. 11. P. 103-115. DOI: 10.1007/s10820-005-3164-3.
30. Tashkinov M.A. Stochastic modeling of deformation process in elastoplastic composites with randomly located inclusions using high order correlation functions. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. № 3. P. 163-185. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.09. (in Russian).
31. Buryachenko V.A. Statistical average of residual stresses in elastically homogeneous medium with random field of noncanonical inclusions. *Computers and Structures*, 2017. V. 187. P.24-34. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.03.012.
32. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Kolzhanova D.Yu., Karimov S.B. Incompressible layered composites with finite deformations on the basis of the asymptotic

averaging method. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017. № 1. P. 32-54. DOI: 10.18698/2309-3684-2017-1-3254. (in Russian).

33. Bakhvalov N. S., Panasenko G. P. Averaging of Processes in Periodic Media. Moscow. Nauka. 1984. 352 p. (in Russian).

34. Ryu S., Lee S., Jung J., Lee J., Kim Y. Micromechanics – based homogenization of the effective physical properties of composites with an anisotropic matrix and interfacial imperfections. *Frontiers in Materials*, 2019. Vol. 6. DOI: 10.3389/fmats.2019.00021.

35. Godara S.S, Mahatob P.K. Prediction of effective properties for composites using micromechanics method. *Materials Today*, 2020. Proceedings 21. P. 1375-1379. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.01.177.

36. Гребенюк С.М. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів: дис. ... докт. Техн. Наук: 01.02.04. Запоріжжя, 2016. 319 с.

37. Konovalov D.A., Yakovlev M.Y. Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE FIDESYS. *Chebyshevskii Sbornik*, 2017. Vol. 18. P. 316-329. DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-316-329. (in Russian).

38. Yun, J.-H.; Jeon, Y.-J.; Kang, M.-S. Prediction of the Elastic Properties of Ultra High Molecular-Weight Polyethylene Particle-Reinforced Polypropylene Composite Materials through Homogenization. *Applied Sciences*, 2022. № 12 (15). DOI: 10.3390/app12157699.

39. Yun J.-H., Jeon Y.-J., Kang M.-S. Prediction of the elastic properties of ultra high molecular weight polyethylene reinforced polypropylene composites using a numerical homogenisation Approach. *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13. DOI: 10.3390/app13063638.

40. Karakulov V.V., Smolin I.Yu., Skripnyak V.A. Numerical procedure of forecasting effective mechanical properties of stochastic composites under shock-wave loading with allowance for the structure evolution. *Vestnik Tomsk. Gos. Univer. Mat. Mekh.*, 2013. №. 4 (24). P. 70-77. (in Russian).

41. Karakulov V.V., Smolin I.Yu., Kulkov S.N. Numerical simulation of mechanical behaviour of concrete under shock wave loading. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018. Vol. 1045. DOI: 10.1088/1742-6596/1045/1/012018.

42. Barral M., Chatzigeorgiou G., Meraghni F., Leon R., Homogenization using modified Mori-Tanaka and TFA framework for elastoplastic-viscoelastic-viscoplastic composites. Theory and numerical validation. *International Journal of Plasticity*, 2020. DOI: 10.1016/j.ijplas.2019.11.011.

43. Chen Q., Wang G., Pindera M-J. Homogenization and localization of nanoporous composites. A critical review and new developments. *Composites Part B: Engineering*, 2018. Vol. 155. P.329-368. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.08.116.

44. Gurtin, M. E., Ian Murdoch A. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 1978. Vol. 14. P. 431-440. DOI:10.1016/0020-7683(78)90008-2.

45. Otero F., Oller S., Martínez X., Salomon O. Numerical homogenization for composite materials analysis. Comparison with other micro mechanical formulations. *Composite Structures*, 2015. Vol. 122. P. 405-416. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.11.041.

46. Lvov G.I., Kostromitskaya O.A. Two-Level Computation of the Elastic Characteristics of Woven Composites. *Mechanics of Composite Materials*, 2018. Vol.54. № 5. P. 577-590. DOI:10.1007/s11029-018-9766-0.

47. Gentieu T., Catapano A., Jumel J., Broughton J. A mean-field homogenisation scheme with CZM-based interfaces describing progressive inclusions debonding. *Composite Structures*, 2019. № 29. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111398.

48. ASTM E111. Standard test method for Young's Modulus, tangent Modulus, and chord modulus. 2017. 7 p. DOI: 10.1520/E0111-17.

49. ASTM E9. Standard test methods of compression testing of metallic materials at room temperature. 2019. 10 p. DOI: 10.1520/E0009-19.

50. ASTM E132. Standard test method for Poisson's ratio at room temperature. 2017. 4 p. DOI: 10.1520/E0132-17.

51. ISO 527-1. Plastics – Determination of tensile properties – Part 1: General principles. 2019. 26 p.

52. ISO 527-2. Plastics – Determination of tensile properties – Part 2: Test conditions for moulding and extrusion plastics. 2012. 11 p.

53. ISO 527-4. Plastics – Determination of tensile properties – Part 4: Test conditions for isotropic and orthotropic fibre-reinforced plastic composites. 2023. 28 p.

54. ISO 527-5. Plastics – Determination of tensile properties – Part 5: Test conditions for unidirectional fibre-reinforced plastic composites. 2021. 17 p.

55. ASTM D638. Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics. 2022. 16 p. DOI: 10.1520/D0638-22.

56. ASTM D3039/D3039M. Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. 2017. 13 p. DOI: 10.1520/D3039_D3039M-17.

57. ASTM D5450/D5450M. Standard Test Method for Transverse Tensile Properties of Hoop Wound Polymer Matrix Composite Cylinders. 2022. 9 p. DOI: 10.1520/D5450_D5450M-22.

58. ASTM D7291/D7291M. Standard Test Method for Through-Thickness “Flatwise” Tensile Strength and Elastic Modulus of a Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composite Material. 2022. 12 p. DOI: 10.1520/D7291_D7291M-22.

59. ISO 604. Plastics – Determination of compressive properties. 2002. 18 p.

60. ISO 844. Rigid cellular plastics – Determination of compression properties. 2021. 15 p.

61. ISO 18352. Carbon-fibre-reinforced plastics – Determination of compression-after-impact properties at a specified impact-energy level. 2009. 20 p.

62. ASTM D695. Standard Test Method for Compressive Properties of Rigid Plastics. 2023. 8 p. DOI: 10.1520/D0695-23.

63. ASTM D3410/D3410M. Standard Test Method for Compressive Properties of Polymer Matrix Composite Materials with Unsupported Gage Section by Shear Loading. 2021. 17 p. DOI: 10.1520/D3410_D3410M-16E01.

64. ASTM D5449/D5449M. Standard Test Method for Transverse Compressive Properties of Hoop Wound Polymer Matrix Composite Cylinders. 2022. 10 p. DOI: 10.1520/D5449_D5449M-22.

65. ASTM D5467/D5467M. Standard Test Method for Compressive Properties of Unidirectional Polymer Matrix Composite Materials Using a Sandwich Beam. 2017. 10 p. DOI: 10.1520/D5467_D5467M-97R17.

66. ASTM D6641/D6641M. Standard Test Method for Compressive Properties of Polymer Matrix Composite Materials Using a Combined Loading Compression (CLC) Test Fixture. 2021. 13 p. DOI: 10.1520/D6641_D6641M-16E02.

67. ASTM D7137/D7137M. Standard Test Method for Compressive Residual Strength Properties of Damaged Polymer Matrix Composite Plates. 2023. 16 p. DOI: 10.1520/D7137_D7137M-23.

68. ASTM D7956/D7956M. Standard Practice for Compressive Testing of Thin Damaged Laminates Using a Sandwich Long Beam Flexure Specimen. 2016. 5 p. DOI: 10.1520/D7956_D7956M-16.

69. ASTM D2954/D2954M. Standard Test Method for Axial Compression Test of Reinforced Plastic and Polymer Matrix Composite Vertical Members. 2022. 5 p. DOI: 10.1520/E2954-15R22.

70. Anand Chairman C., Jayasathyakawin S., Kumaresh Babu S. P. Pavichandran M. Mechanical properties of basalt fabric plain and twill weave reinforced epoxy composites. *Materials Today: Proceedings*, 2021. Vol. 46. P. 9480-9483. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.03.240.

71. Acosta-Flores M., Jimenez-Lopez E., Chavez-Castillo M., Molina-Ocampo A., Delfin-Vazquez J. J., Rodriguez-Ramirez J. A. Experimental method for obtaining the elastic properties of components of a laminated composite. *Results in Physics*, 2019. Vol. 12. P. 1500-1505. DOI: 10.1016/j.rinp.2019.01.016.

72. Sutton M., Wolters W., Peters W., Ranson W., McNeill S. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*. 1983. Vol. 1. P. 133–139. DOI: 10.1016/0262-8856(83)90064-1.

73. Bruck H. A., McNeill S. R., Sutton M. A., Peters W. H. Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction. *Experimental Mechanics*, 1989. Vol. 29. P. 261-267. DOI: 10.1007/bf02321405.

74. Dey V., Zani G., Colombo M., Di Prisco M., Mobasher B. Flexural impact response of textile-reinforced aerated concrete sandwich panels. *Materials & Design*, 2015. Vol. 86. P. 187-197. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.07.004.
75. Gao G., Huang S., Xia K., Li Z. Application of Digital Image Correlation (DIC) in Dynamic Notched Semi-Circular Bend (NSCB) Tests. *Experimental Mechanics*. 2015. Vol. 55. P. 95–104. DOI: 10.1007/s11340-014-9863-5.
76. Koerber H., Xavier J., Camanho P. P. High strain rate characterisation of unidirectional carbon-epoxy IM7-8552 in transverse compression and in-plane shear using digital image correlation. *Mechanics of Materials*, 2010. Vol. 42. P. 1004-1019. DOI: 10.1016/j.mechmat.2010.09.003.
77. Pan B. Digital image correlation for surface deformation measurement: historical developments, recent advances and future goals. *Measurement Science and Technology*, 2018. Vol. 29. P.1-32. DOI:10.1088/1361-6501/aac55b.
78. He T., Liu L., Makeev A., Shonkwiler B. Characterization of stress–strain behavior of composites using digital image correlation and finite element analysis. *Composite Structures*, 2016. Vol. 140. P. 84–93. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.12.018.
79. Reu P.L., Toussaint E., Jones E., Bruck H.A., Iadicola M., Balcaen R., Turner D.Z., Siebert T., Lava P., Simonsen M. DIC Challenge: Developing Images and Guidelines for Evaluating Accuracy and Resolution of 2D Analyses. *Experimental Mechanics*, 2018. Vol. 58. P. 1067-1099. Doi:10.1007/s11340-017-0349-0.
80. Tekieli M., De Santis S., de Felice G., Kwiecień A., Roscini F. Application of Digital Image Correlation to composite reinforcements testing. *Composite Structures*, 2017. Vol. 160. P. 670-688. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.10.
81. Holmes J., Sommacal S., Das R., Stachurski Z., Compston P. Digital image and volume correlation for deformation and damage characterisation of fibre-reinforced composites: A review. *Composite Structures*, 2023. Vol. 315. Article 116994. DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.116994.
82. Mehdikhani M., Breite C., Swolfs Y., Soete J., Wevers M., Lomov S.V., Gorbatikh L. Digital volume correlation for meso/micro in-situ damage analysis in carbon fiber

reinforced composites. *Compos Science and Technology*, 2021. Vol. 213. Article 108944. DOI: 10.1016/j.compscitech.2021.108944.

83. Holmes J., Sommacal S., Stachurski Z., Das R., Compston P. Digital image and volume correlation with X-ray micro-computed tomography for deformation and damage characterisation of woven fibre-reinforced composites. *Composite Structures*, 2022. Vol. 279. Article 114775. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.114775.

84. Post D. Moire Interferometry for Composites. In: Pendleton, R.L., Tuttle, M.E. *Manual on Experimental Methods for Mechanical Testing of Composites*. Springer, Dordrecht. 1989. P. 67-80. DOI: 10.1007/978-94-009-1129-1_12.

85. Mollenhauer D. H., Fredrickson B. M., Schoeppner G. A., Iarve E. V., Palazotto A. N. Moiré interferometry measurements of composite laminate repair behavior: Influence of grating thickness on interlaminar response. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2008. Vol. 39. P. 1322-1330. DOI: 10.1016/j.compositesa.2008.02.015.

86. Wang Q., Okumura S., Ri S., Xia P., Tsuda H., Ogihara S. Second-order moiré method for accurate deformation measurement with a large field of view. *Optics Express*, 2020. Vol. 28. P. 7498-7514. DOI: 10.1364/OE.387997.

87. Wang Q., Ri S., Mohammad Fikry M.J., Ogihara S. Multiplication sampling moire method for full-field deformation measurement of composite materials. *Optics Letter*, 2022. Vol. 47. P. 70-73. DOI: 10.1364/OL.445854.

88. Gunnar Melin L. Moire Techniques for Measurement of the Deformation Field at Crack Tips in Fiber Composite Materials. Division of Experimental Mechanics Department of Mechanical Engineering Luleå University of Technology. Luleå. Sweden, 1995. 63 p.

89. Gol'denblat I.I., Kopnov V.A. Strength of glass-reinforced plates in the complex stress state. *Mekhanika Polimerov*, 1965. Vol. 1. № 2. P. 70-78. (in Russian).

90. Tsai S. W., Wu E. M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, 1971. Vol 5. P. 58-80. DOI: 10.1177/002199837100500106.

91. Vu E. M., Sendecsky G. P. Phenomenological criteria for the destruction of anisotropic media. *Mechanics of Composite Materials*, 1978. Moscow. Mir. P. 401-491. (in Russian).

92. Yatsenko V.F. Strength of composite materials, 1988. Kyiv. Vyshcha shkola. 191 p. (in Russian).
93. Hill R. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behavior. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1964. Vol. 12. P. 199-212. DOI: 10.1016/0022-5096(64)90019-5.
94. Gol'denblat I.I., Bazhanov V.L., Kopnov V.A. Long-term strength in mechanical engineering, 1977. Moscow. Mashinostroyeniye. 248 p. (in Russian).
95. Hoffman O. The Brittle Strength of Orthotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, 1967. Vol. 1. P. 200–206. DOI:10.1177/002199836700100210.
96. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press. London, 1950. 318 p.
97. Jones Robert M. Mechanics of composite materials. Taylor & Francis. 2nd ed, 1999. P. 109-112.
98. Reddy J. N., Pandey A. K. A first-ply failure analysis of composite laminates. *Computers & Structures*, 1987. Vol. 25. P. 371–393. DOI:10.1016/0045-7949(87)90130-1.
99. Hashin Z. Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Journal of Applied Mechanics*, 1980. Vol. 47. P. 329-334. DOI: 10.1115/1.3153664.
100. Hashin Z., Rotem A. A Fatigue Failure Criterion for Fiber Reinforced Materials. *Journal of Composite Materials*, 1973. Vol. 7. P. 448-464. DOI: 10.1177/002199837300700404.
101. Puck A., Schneider W. On failure mechanisms and failure criteria of filament-wound glass-fibre/resin composites. *Plastics and Polymers*. The Plastics Institute Transactions and Journal. Pergamon Press, 1969. P. 33-44.
102. Puck A. Strength analysis on GRP laminates under combined stresses; fracture hypotheses and layer by-layer failure analysis. *Kunststoffe German Plastics*, 1969. Vol. 59. № 11. P. 780-787. (in German).
103. Puck A. Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis. Carl Hanser Verlag. Germany, 1996. 227 p. (in German).

104. Puck A, Schürmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 1998. Vol. 58. P. 1045-1067.

105. Puck A., Schürmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 2002. Vol. 62. P. 1633-1662. DOI: 10.1016/s0266-3538(01)00208-1.

106. Davila C G., Comanho P.P. Failure Criteria for FRP Laminates in Plane-Stress. NASA. Langley Research Center. Hampton, Virginia, 2003. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20040001363/downloads/20040001363.pdf> (дата звернення: 03.02.2023).

107. Pinho S.T., Davila C G., Comanho P.P., Lannucci L., Robinson P. Failure Models and Criteria for FRP Under In-Plane or Three-Dimensional Stress States Including Shear Non-Linearity. NASA Langley Research Center Hampton, VA 23681, 2005. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20050110223/downloads/20050110223.pdf> (дата звернення: 03.02.2023).

108. Cuntze R. Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbund unter mehrachsiger Beanspruchung: Modellbildung und Experimente. VDI Verlag GmbH. Düsseldorf, 1997. 249 p. (in German).

109. Cuntze R. The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of unidirectional laminae under static triaxial stress states. *Journal of Composite Materials*, 2012. Vol. 46. P. 2563-2594. DOI: 10.1177/0021998312449894.

110. Icardi U., Locatto S., Longo, A. Assessment of Recent Theories for Predicting Failure of Composite Laminates. *Applied Mechanics Reviews*, 2007. Vol. 60. P. 76-86. DOI: 10.1115/1.2515639.

РОЗДІЛ 2 МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ПРУЖНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Цей розділ присвячений розробці способу визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів різної структури армування.

Для виконання розрахунків конструкцій із композиційних матеріалів на міцність потрібно мати низку механічних характеристик досліджуваних матеріалів. Тому важлива задача створення нових композиційних матеріалів полягає в обчисленні ефективних пружних характеристик за відомими пружними характеристиками структурних компонентів.

Композиційні матеріали мають різноманітну структуру; це ускладняє отримання точного аналітичного розв'язку при визначенні ефективних пружних характеристик КМ. Тому найбільш універсальними для вирішення задач гомогенізації композиційних матеріалів є чисельні методи.

Розробка чисельного методу визначення ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу дозволить скоротити час створення конструкцій виготовлених із КМ з потрібними пружними характеристиками. Пружні характеристики в подальшому використовуються для визначення напружено-деформованого стану композитних конструкцій на макрорівні.

2.1 Ефективні пружні властивості композиційних матеріалів

Оскільки об'єм матеріалу значно перевищує радіус волокна, композиційний матеріал можна умовно вважати гомогенним з усередненими за об'ємом V значеннями компонентів тензору напружень і деформацій:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (2.1)$$

Для проведення розрахунків композиційний матеріал вважається гомогенним анізотропним матеріалом з усередненими пружними характеристиками. Узагальнений закон Гука в тензорному запису має вигляд [1]

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = A_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

де A_{ijkl} – константи піддатливості еквівалентного гомогенного матеріалу;

$\langle \varepsilon_{ij} \rangle, \langle \sigma_{ij} \rangle$ – усереднені значення деформацій і напружень.

У зворотній формі узагальнений закон Гука має вигляд:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = B_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

де B_{ijkl} – константи жорсткості еквівалентного гомогенного матеріалу.

Закон Гука для ортотропного матеріалу в системі прямокутних декартових координат, осі якої перпендикулярні до площин симетрії пружних характеристик, зручно зобразити в матричній формі [2, 3]:

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \\ \langle \gamma_{xz} \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \tau_{xz} \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

де a_{ij} – компоненти матриці піддатливості.

Матрицю піддатливості можна виразити через інженерні константи [4]:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & -\nu_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & -\nu_{zy}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz}/E_x & -\nu_{yz}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

де E_x, E_y, E_z – модулі пружності;

$\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}, \nu_{yx}, \nu_{zx}, \nu_{zy}$ – коефіцієнти Пуассона;

G_{yz}, G_{zx}, G_{xy} – модулі зсуву.

Матриця жорсткості – обернена матриця пружних сталей $[B] = [A]^{-1}$.

У матричній формі закон Гука в зворотній формі має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \tau_{xz} \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \\ \langle \gamma_{xz} \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

де b_{ij} – компоненти матриці жорсткості.

Тому пружні властивості ортотропного композиційного матеріалу визначаються 9-ма незалежними сталими $E_x, E_y, E_z, G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$.

2.2 Чисельна гомогенізація пружних сталей композиційних матеріалів

Даний підрозділ присвячений розробці методу визначення ефективних пружних характеристик тривимірно-армованих композиційних матеріалів за відомими пружними властивостями волокон та матриці (в'язучого). Наразі існує низка добре розроблених і відомих методик визначення пружних характеристик односпрямованих КМ [5-8], але методи визначення констант пружності тривимірно армованих КМ мало розроблені. У своїй більшості конструкції з КМ мають ортотропні механічні властивості вздовж трьох взаємно-ортогональних осей симетрії.

Так, частина компонентів лопаті ПГ (обшивка, лонжерон) – це шаруваті композити із скло- та вугле-тканини різних патернів архітектури плетіння (weave architectures); лопатка вентилятора – це ортогональна тривимірна тканина структура. Отже, при моделюванні НДС лопатки вентилятора і лопаті ПГ можна застосувати властивості еквівалентного гомогенного ортотропного матеріалу, які потрібно визначити з експериментів.

Оскільки композиційний матеріал має періодичну структуру – вводиться поняття представницького елемента об'єму (representative volume element) або комірки

періодичності (unit cell), в якому всі усереднені за об'ємом компоненти напружень і деформацій дорівнюють відповідним величинам, обчисленими для розглянутого композиту в цілому [9].

Наразі існує низка програмних комплексів для моделювання матеріалів та їх структури за допомогою яких можна визначити ефективні пружні сталі КМ. Платформа моделювання матеріалів Digimat [10], дозволяє здійснити мікромеханічне моделювання складних багатофазних композиційних матеріалів. Модуль Digimat-MF дозволяє обчислити ефективні (макроскопічні) властивості багатофазних матеріалів на основі підходу гомогенізації середнього поля. Модуль Digimat-FE дозволяє створювати представницький елемент об'єму мікроструктури КМ да дослідити його методом скінчених елементів. Недоліком платформи Digimat є недостатня якість моделей 3D КМ з високим об'ємним вмістом волокон (спостерігається взаємоперетин x -волокон основи, y -волокон утоку та z -волокон), що призводить до похибки у визначенні ефективних пружних властивостей і інтерпретації НДС моделей. Подібні недоліки має програмне забезпечення TexGen, розроблене для моделювання геометрії текстильних структур. Програмний продукт Ansys Material Designer також дозволяє визначити ефективні пружні характеристики КМ за відомими властивостями компонентів, але він обмежений стандартними структурами представницьких елементів об'єму та декількома простими патернами архітектури плетіння.

2.2.1 Односпрямований композиційний матеріал

Розглянутий нижче підхід заснований на визначенні ефективних пружних властивостей композиційного матеріалу згідно з властивостями його компонентів. Для випадку періодичних матеріалів вибирається періодична елементарна комірка. Результатом мікромеханічної постановки задачі є обчислення ефективних пружних сталих моношару композиційного матеріалу, що дозволяє в подальшому проводити дослідження на новому рівні абстрагування.

Розглянемо композиційний матеріал, армований волокнами паралельними осі Z (рис. 2.1).

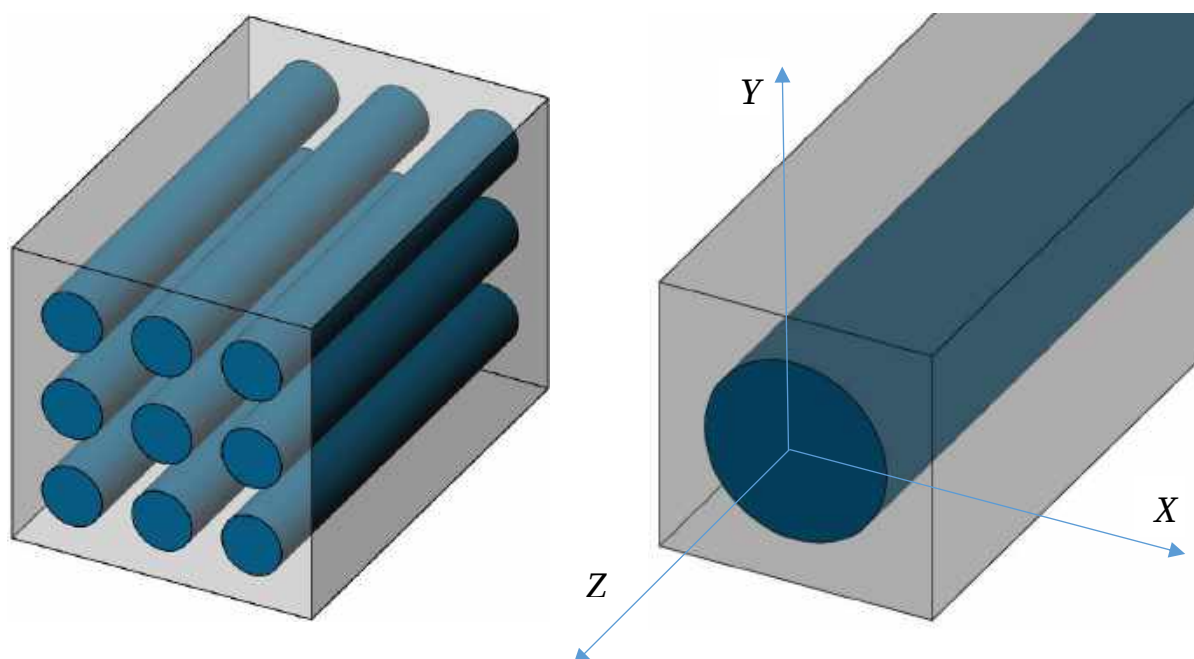


Рисунок 2.1. Структура односпрямованого композиційного матеріалу та представницького елемента об'єму

Під час визначення ефективних пружних сталих моношару композиту за відомими пружними характеристиками волокон і в'язучого потрібне моделювання чотирьох експериментів – при навантаженні шару уздовж та поперек армування, при поздовжньому та поперечному зсуві.

Розрахункові експерименти проводяться з припущеннями, що:

1. Міжфазна межа має ідеальний контакт, тобто описується безперервністю переміщень і поверхневих напружень між волокном і в'язучим.
2. Компоненти композиту – однорідні й лінійно-пружні матеріали.
3. Волокна – прямі, паралельні, розподілені рівномірно.

Властивості композиційного матеріалу в напрямках X та Y однакові, тому враховуючи симетрію матриці пружних сталих (2.6) $b_{ij} = b_{ji}$ маємо співвідношення:

$$b_{11} = b_{22}; \quad b_{13} = b_{23} = b_{31} = b_{32}; \quad b_{44} = b_{55}. \quad (2.7)$$

Чисельними експериментами моделюються чотири випадки деформування: розтяг у напрямках Z , X та зсув у площинах XY , YZ .

Перший чисельний експеримент моделює розтяг у напрямку осі Z . Визначаються компоненти матриці жорсткості:

$$b_{13} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_z \rangle}; \quad b_{33} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_z \rangle}. \quad (2.8)$$

Другий чисельний експеримент моделює розтяг у напрямку осі X . Визначаються компоненти матриці жорсткості:

$$b_{11} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad (2.9)$$

Третій чисельний експеримент моделює зсув у площині XY . Визначається компонента матриці жорсткості:

$$b_{66} = \frac{\langle \tau_{xy} \rangle}{\langle \gamma_{xy} \rangle}. \quad (2.10)$$

Четвертий чисельний експеримент моделює зсув у площині YZ . Визначається компонента матриці жорсткості:

$$b_{44} = \frac{\langle \tau_{yz} \rangle}{\langle \gamma_{yz} \rangle}. \quad (2.11)$$

Для знаходження останньої константи, щоб не будувати тривимірну модель представницького об'єму, доцільно використати математичну аналогію між задачею поздовжнього зсуву в площині YZ та задачею стаціонарного теплового аналізу в площині YZ .

Для двовимірного температурного поля $T(x, y)$ диференціальне рівняння теплопровідності стаціонарного теплового режиму має вигляд [11]

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2.12)$$

де ∇^2 – оператор Лапласа.

Тепловий потік визначається співвідношеннями

$$Q_x^1 = K_1 \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y^1 = K_1 \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Q_x^2 = K_2 \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y^2 = K_2 \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.13)$$

де K_1, K_2 – коефіцієнти теплопровідності.

Функція переміщення $w(x, y)$ у напрямку армування повинна задовольняти рівнянню:

$$\nabla^2 w = 0. \quad (2.14)$$

Зв'язок дотичних напружень з переміщеннями в поздовжньому напрямку з урахуванням різних модулів зсуву волокон та в'язучого виражається як

$$\tau_{xz}^1 = G_1 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz}^1 = G_1 \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \tau_{xz}^2 = G_2 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz}^2 = G_2 \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.15)$$

де G_1, G_2 – модулі зсуву.

На межі волокна та в'язучого потрібні виконуватися умови неперервності. В задачі стаціонарної теплопровідності між температурою і тепловим потоком, в задачі поздовжнього зсуву між переміщеннями і дотичними напруженнями.

Як видно, крайові задачі стаціонарної теплопровідності (2.12), (2.13) та поздовжнього зсуву (2.14), (2.15) є аналогічними. Тобто потрібно прийняти $K_1 = G_1$, $K_2 = G_2$, і значення температури $T(x, y)$ стануть еквівалентними переміщенню $w(x, y)$, а теплові потоки Q_x, Q_y стануть еквівалентними дотичним напруженням τ_{xz}, τ_{yz} .

Проведення чисельних експериментів.

Під час моделювання представницького елемента об'єму використано наступні дані, щодо характеристик компонентів композиційного матеріалу (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Властивості компонентів композиту

Компонент	Модуль пружності E , ГПа	Коефіцієнт Пуассона ν	Густина den, кг/м ³
Fiber (волокно)	250	0,2	1790
Matrix (в'язуче)	4	0,4	1250

Розміри представницької моделі: довжини сторін одиничні; радіус волокна $r = 0,8$; коефіцієнт об'ємного вмісту 0,5027.

Після завершення аналізу у постпроцесорі обчислено середні значення напружень:

$$\langle \sigma_x \rangle = \int_0^1 \sigma_x(x=1, y) dy; \quad \langle \sigma_y \rangle = \int_0^1 \sigma_y(x, y=1) dx; \quad \langle \sigma_z \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_z dx dy. \quad (2.16)$$

У ПК ANSYS для проведення зазначених експериментів використано скінчений елемент PLANE 183, що має 8 вузлів та два ступеня свободи в кожному вузлі: переміщення в напрямках осей X та Y . Скінчений елемент застосовується для

розв'язання плоских задач і має опцію «узагальнена плоска деформація» (*generalized plane strain*).

Під час моделювання задачі про стаціонарний розподіл температури був використаний 8-ми вузловий скінчений елемент PLANE 77 з одним ступенем свободи в кожному вузлі.

Скінчено-елементна сітка має 17211 елементів та 52126 вузлів (рис. 2.2).

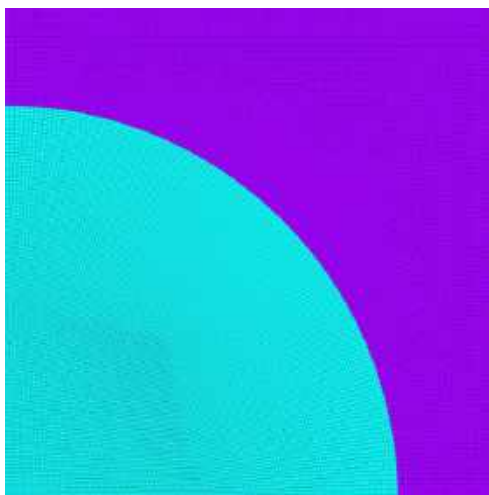


Рисунок 2.2. Скінчено-елементна сітка представницької моделі
Моделювання розтягу в напрямку осі Z.

Граничні умови задано наступним чином:

- на лініях $x = 0, y = 0$ – умови симетрії;
- на лініях $x = 1, y = 1$ – відсутність відповідних переміщень $u_x = 0, u_y = 0$ і дотичних напружень $\tau_{xy} = 0, \tau_{yx} = 0$.

За допомогою опції *generalized plane strain* задається зусилля в напрямку армування, яке, завдяки одиничним розмірам моделі буде дорівнювати значенню напруження σ_z . Для обчислення σ_z приймалось 10^6 Па.

Вектор середніх деформацій має вигляд:

$$\langle \varepsilon \rangle = [00\langle \varepsilon_z \rangle 000]^T. \quad (2.17)$$

де $\langle \varepsilon_z \rangle$ обчислюється в постпроцесорі.

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.8) пружні характеристики еквівалентного матеріалу b_{13}, b_{33} .

Моделювання розтягу в напрямку осі X.

Граничні умови задано наступним чином:

- на лініях $x = 0, y = 0$ – умови симетрії;
- на лінії $y = 1$ – переміщення $u_y = 0$, дотичне напруження $\tau_{yx} = 0$;
- на лінії $x = 1$ – переміщення $u_x = \varepsilon$, дотичне напруження $\tau_{xy} = 0$.

Для обчислення величина ε приймалась рівною 10^{-3} .

Вектор середніх деформацій має вигляд

$$\langle \varepsilon \rangle = [\langle \varepsilon_x \rangle 00000]^T. \quad (2.18)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.9) пружні характеристики еквівалентного матеріалу b_{11}, b_{21} .

Моделювання зсуву в площині XY.

Граничні умови задано наступним чином:

- на лініях $x = 0, x = 1$ – переміщення $u_y = 0$;
- на лінії $y = 0$ – переміщення $u_x = 0$;
- на лінії $y = 1$ – переміщення $u_x = \varepsilon$.

Для обчислення ε приймалась рівною 10^{-3} .

Вектор середніх деформацій має вигляд:

$$\langle \varepsilon \rangle = [00000 \langle \gamma_{xy} \rangle]^T. \quad (2.19)$$

У постпроцесорі обчислено середнє значення дотичного напруження:

$$\langle \tau_{xy} \rangle = \int_0^1 \tau_{xy}(x=1, y) dy. \quad (2.20)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.10) пружну характеристику еквівалентного матеріалу b_{66} .

Моделювання зсуву в площині YZ.

Граничні умови задано наступним чином:

- на лініях $x = 0, x = 1$ – тепловий потік $Q_y = 0$;
- на лінії $y = 0$ – температура $T = 0$;
- на лінії $y = 1$ – температура $T = 10^{-3}$.

Вектор середніх деформацій має вигляд:

$$\langle \varepsilon \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \langle \gamma_{yz} \rangle & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (2.21)$$

У постпроцесорі обчислено середнє значення дотичного напруження:

$$\langle \tau_{yz} \rangle = \int_0^1 \tau_{yz}(x, y=1) dx. \quad (2.22)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.11) пружну характеристику еквівалентного матеріалу b_{44} .

Результати чисельних експериментів

Розтяг в напрямку осі Z (рис. 2.3, 2.4).

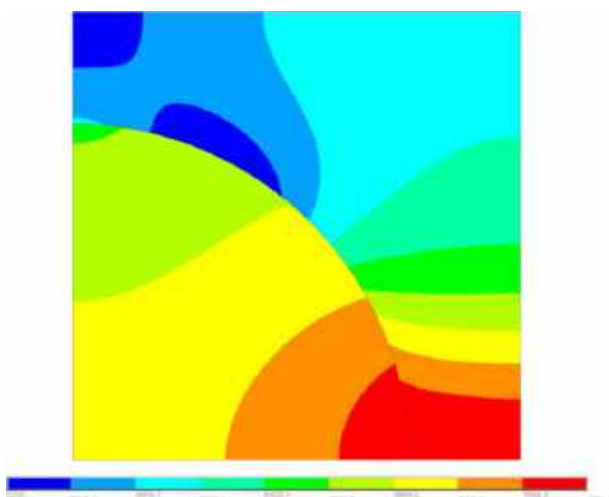


Рисунок 2.3. Розподіл напружень σ_x

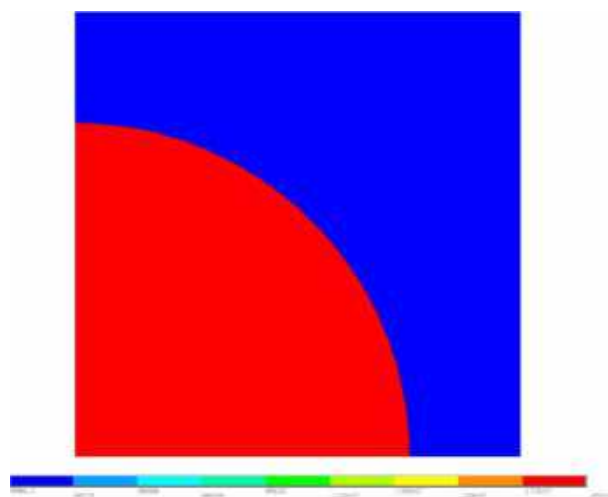


Рисунок 2.4. Розподіл напружень σ_z

Визначені в постпроцесорі величини (2.16), (2.17):

$$\langle \varepsilon_z \rangle = 0,753 \cdot 10^{-5};$$

$$\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0,6603 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Компоненти матриці жорсткості (2.8):

$$b_{13} = 0,8769 \cdot 10^{10} \text{ Па;}$$

$$b_{33} = 13,2802 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

Розтяг в напрямку осі X (рис. 2.5).

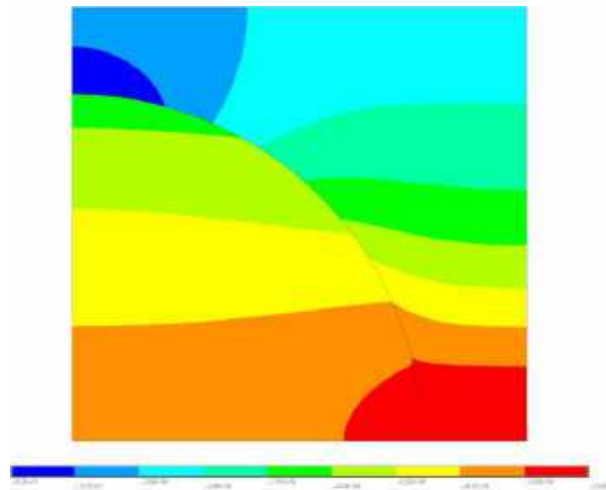


Рисунок 2.5. Розподіл напружень σ_x

Визначені в постпроцесорі величини (2.16):

$$\langle \sigma_x \rangle = 0,21098 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$\langle \sigma_y \rangle = 0,91430 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Компоненти матриці жорсткості (2.9):

$$b_{11} = 2,1098 \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$b_{21} = 0,9143 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

Зсув в площині XY (рис. 2.6).

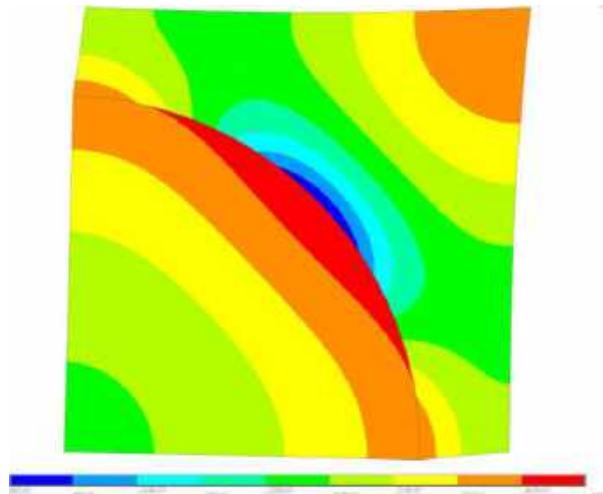


Рисунок 2.6. Розподіл еквівалентних напружень

Визначена в постпроцесорі величина (2.20):

$$\langle \tau_{xy} \rangle = 0,31184 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Компонента матриці жорсткості (2.10):

$$b_{66} = 0,3118 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

Зсув в площині YZ (рис. 2.7).

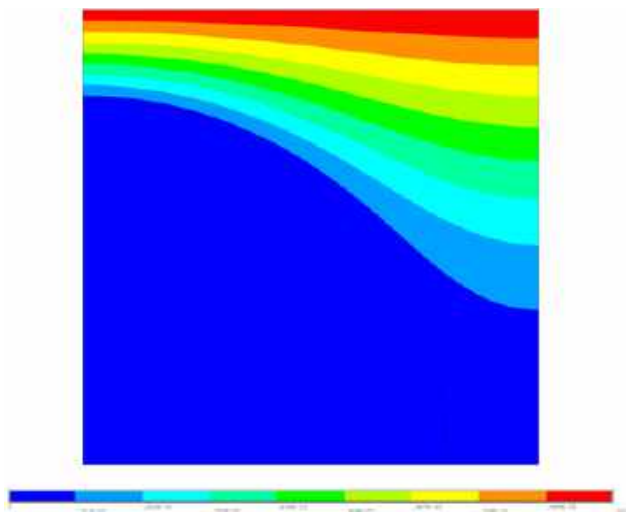


Рисунок 2.7. Розподіл температури

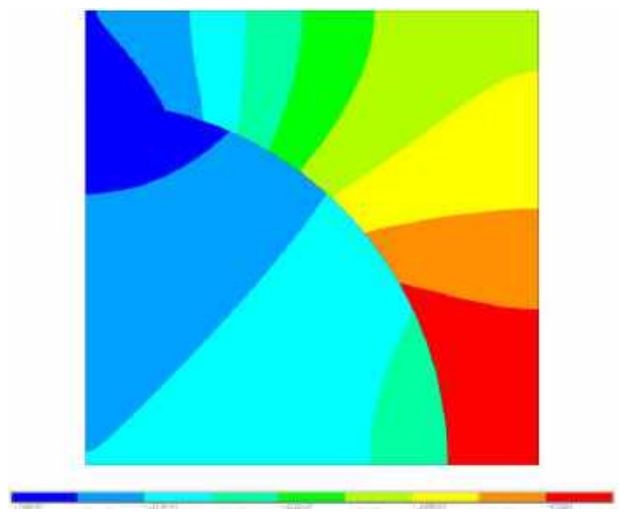


Рисунок 2.8. Тепловий потік Q_y

Визначена в постпроцесорі величина (2.22):

$$\langle \tau_{yz} \rangle = 0,42709 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Компонента матриці жорсткості (2.11):

$$b_{44} = 0,42709 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

У результаті розрахунків моделі представницького елемента об'єму отримано пружні сталі еквівалентного гомогенного матеріалу.

Матриця жорсткості має вигляд, Па

$$B = 10^{10} \cdot \begin{pmatrix} 2,1098 & 0,9143 & 0,8769 & 0 & 0 & 0 \\ 0,9143 & 2,1098 & 0,8769 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8769 & 0,8769 & 13,2802 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4271 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4271 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3118 \end{pmatrix}.$$

Матриця податливості, Па^{-1}

$$A = 10^{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0,5902 & -0,2463 & -0,0227 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2463 & 0,5902 & -0,0227 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0227 & -0,0227 & 0,0783 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,3414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,2072 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи співвідношення (2.5), розраховано значення ефективних пружних характеристик еквівалентного гомогенного матеріалу, які наведено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Ефективні пружні сталі односпрямованого композиційного матеріалу

Модуль пружності, Мпа			Коефіцієнт Пуассона			Модуль зсуву, Мпа		
E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{xz}	ν_{yz}	G_{yz}	G_{xz}	G_{xy}
16945	16945	127716	0,41737	0,03847	0,03847	4271	4271	3118

2.2.2 Двовимірно армований композиційний матеріал

Розглянемо композиційний матеріал з ортогональним двовісним армуванням волокнами, що паралельні осям X та Y (рис. 2.9).

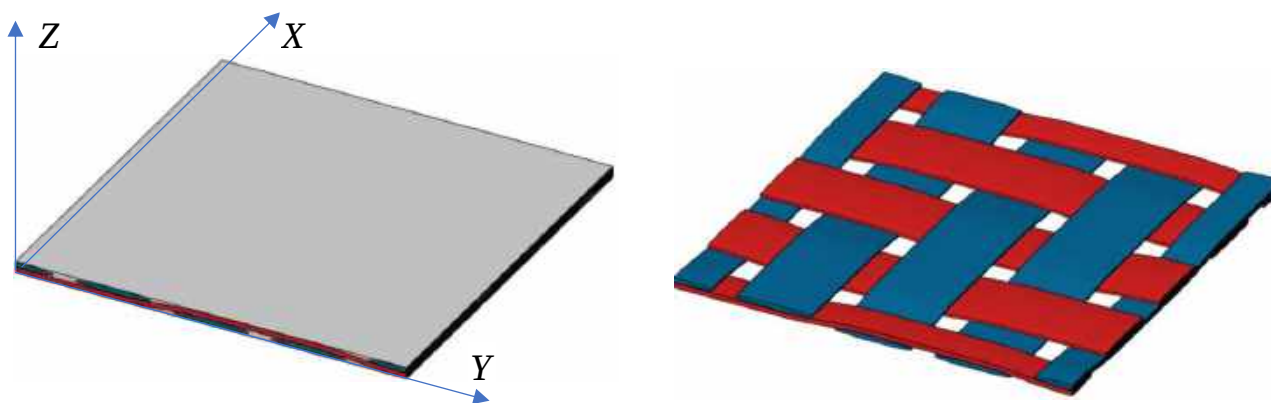


Рисунок 2.9. Представницька модель композиційного матеріалу

При визначенні ефективних пружних характеристик потрібне виконання низки чисельних експериментів. Аналіз спільної роботи волокон і матриці з різними

пружними характеристиками є складною математичною задачею. Для її розв'язання використовуються моделі волокна й матриці з урахуванням їх спільної роботи.

Чисельні експерименти проводяться з такими припущеннями:

1. Міжфазна межа має ідеальний контакт, тобто описується безперервністю переміщень і поверхневих напружень між волокном і в'язучим.
2. Компоненти композиційного матеріалу однорідні та лінійно-пружні.
3. Волокна розподілені регулярно та рівномірно.

Для чисельного дослідження використовується мінімальний тривимірний представницький елемент об'єму, що періодично повторюється в усьому об'ємі композиційного матеріалу по трьох напрямках. У аналізі напружено-деформованого стану представницького елемента об'єму задаються відповідні граничні умови. Виконуються дві серії розрахунків ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу: із завданням відповідних умов симетрії (перша серія розрахунків) та із задаванням умов періодичності (друга серія розрахунків).

Геометричне моделювання представницького елемента об'єму здійснено в програмному пакеті NX. Габаритні розміри моделі вздовж осі X ($a = 8$ мм); осі Y ($b = 8$ мм); осі Z ($c = 0,22$ мм). Початок системи координат у точці $x = 0, y = 0, z = 0$.

Пружні властивості розглянутого композиційного матеріалу однакові в напрямках осей X і Y , унаслідок чого мають місце рівності (2.7). Також враховується симетрія матриці пружних сталих (2.6) $b_{ij} = b_{ji}$.

Чисельними експериментами моделюються шість випадків деформування: розтяг в напрямках осей X, Y, Z та зсув в площинах XY, YZ, XZ .

Перший експеримент моделює розтяг у напрямку осі X . Визначаються компоненти матриці жорсткості:

$$b_{11} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{21} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{31} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}. \quad (2.23)$$

Другий експеримент моделює розтяг у напрямку осі Y . Визначається компонента матриці жорсткості:

$$b_{22} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_y \rangle}. \quad (2.24)$$

Третій експеримент моделює розтяг у напрямку осі Z. Визначаються компоненти матриці жорсткості:

$$b_{23} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_z \rangle}; \quad b_{33} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_z \rangle}. \quad (2.25)$$

Четвертий експеримент моделює зсув у площині XY. Визначається компонента матриці жорсткості:

$$b_{66} = \frac{\langle \tau_{xy} \rangle}{\langle \gamma_{xy} \rangle}. \quad (2.26)$$

П'ятий експеримент моделює зсув у площині YZ. Визначається компонента матриці жорсткості:

$$b_{44} = \frac{\langle \tau_{yz} \rangle}{\langle \gamma_{yz} \rangle}. \quad (2.27)$$

Шостий експеримент моделює зсув у площині XZ. Визначається компонента матриці жорсткості:

$$b_{55} = \frac{\langle \tau_{xz} \rangle}{\langle \gamma_{xz} \rangle}. \quad (2.28)$$

Під час чисельного аналізу методом скінчених елементів у ПК ANSYS використано скінчений елемент SOLID 186, що має 20 вузлів та три ступеня свободи в кожному вузлі. Скінченно-елементна сітка моделі комірки періодичності має 454059 елементів і 674896 вузлів.

Проведення чисельних експериментів.

Для моделювання представницького елемента об'єму використана наступна інформація щодо пружних властивостей компонентів композиційного матеріалу:

- волокно: $E_x = 250$ ГПа; $E_y = 13$ ГПа; $G_{xy} = 13$ ГПа; $\nu_{xy} = 0,2$; $\nu_{yz} = 0,22$;
den = 1790 кг/м³;
- матриця: $E = 4$ ГПа; $\nu = 0,4$; den = 1250 кг/м³.

Також для моделювання властивостей композиційного матеріалу введені три матеріали: матеріал 1 – для волокон у напрямку осі X , матеріал 2 – для волокон у напрямку осі Y , матеріал 3 – для в'язучого. Характеристики матеріалів 1 і 2 виходять з умов трансверсальної ізотропії і формули, що пов'язує модуль пружності та модуль зсуву. Так для матеріалу 1:

$$E_{y1} = E_{z1} = 13 \text{ ГПа}; \quad G_{xy1} = G_{xz1} = 13 \text{ ГПа}; \quad \nu_{xy1} = \nu_{xz1} = 0,2; \quad \nu_{yz1} = 0,22;$$

$$G_{yz1} = E_{y1} / 2(1 + \nu_{yz1}) = 5,3279 \text{ ГПа}.$$

Відповідно для матеріалу 2 характеристики визначено аналогічно з урахуванням напрямку волокна вздовж осі Y , та симетрії матриці пружних сталей:

$$E_{x2} = E_{z2} = 13 \text{ ГПа}; \quad G_{xy2} = G_{yz2} = 13 \text{ ГПа}; \quad G_{xz2} = G_{yz1} = 5,3279 \text{ ГПа}. \quad \nu_{yz2} = 0,2;$$

$$\nu_{xz2} = 0,22; \quad \nu_{xz2} = \nu_{xy1} \cdot E_{y1} / E_{x1} = 0,0104.$$

Властивості трьох матеріалів наведено на рис. 2.10.

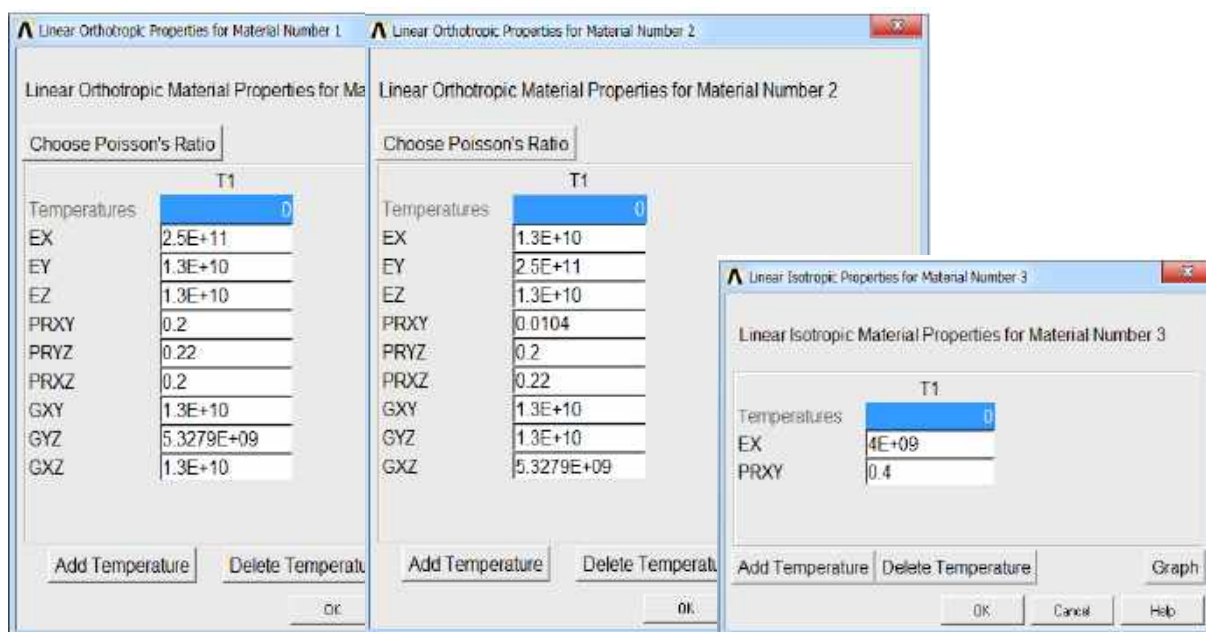


Рисунок 2.10. Характеристики матеріалів волокон і в'язучого

Після завершення аналізу в постпроцесорі обчислено середні по площині S значення напружень для перших трьох експериментів:

$$\langle \sigma_x \rangle = \frac{1}{S} \int_0^b \int_0^c \sigma_x dy dz; \quad \langle \sigma_y \rangle = \frac{1}{S} \int_0^a \int_0^c \sigma_y dx dz; \quad \langle \sigma_z \rangle = \frac{1}{S} \int_0^a \int_0^b \sigma_z dx dy. \quad (2.29)$$

Для останніх трьох експериментів:

$$\langle \tau_{xy} \rangle = \frac{1}{S} \int_0^b \int_0^c \tau_{xy} dy dz; \quad \langle \tau_{yz} \rangle = \frac{1}{S} \int_0^a \int_0^c \tau_{yz} dx dz; \quad \langle \tau_{xz} \rangle = \frac{1}{S} \int_0^b \int_0^c \tau_{xz} dy dz. \quad (2.30)$$

Моделювання розтягу в напрямку осі X.

Для обчислення величина ε приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_x|_{x=a} = \varepsilon \cdot a$. Далі для скорочення запису введено позначення:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=a} &= u_{xa}; & u_x|_{y=b} &= u_{xb}; & u_x|_{z=c} &= u_{xc}; \\ u_y|_{x=a} &= u_{ya}; & u_y|_{y=b} &= u_{yb}; & u_y|_{z=c} &= u_{yc}; \\ u_z|_{x=a} &= u_{za}; & u_z|_{y=b} &= u_{zb}; & u_z|_{z=c} &= u_{zc}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0. \quad (2.32)$$

Граничні умови симетрії задано наступним чином:

$$\begin{aligned} - \text{на площині } x = 0: & \quad u_x = 0; & \tau_{xy} &= 0; & \tau_{xz} &= 0; \\ - \text{на площині } y = 0: & \quad u_y = 0; & \tau_{xy} &= 0; & \tau_{yz} &= 0; \\ - \text{на площині } z = 0: & \quad u_z = 0; & \tau_{yz} &= 0; & \tau_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Також:

$$\begin{aligned} - \text{на площині } x = a: & \quad u_x = \varepsilon \cdot a; & \tau_{xy} &= 0; & \tau_{xz} &= 0; \\ - \text{на площині } y = b: & \quad u_y = 0; & \tau_{xy} &= 0; & \tau_{yz} &= 0; \\ - \text{на площині } z = c: & \quad u_z = 0; & \tau_{yz} &= 0; & \tau_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Граничні умови періодичності задано наступним чином:

– співвідношення для площин $x = 0$ та $x = a$:

$$u_{xa} = u_{x0} + \varepsilon \cdot a; \quad u_{ya} = u_{y0}; \quad u_{za} = u_{z0};$$

– співвідношення для площин $y = 0$ та $y = b$:

$$u_{xb} = u_{x0}; \quad u_{yb} = u_{y0}; \quad u_{zb} = u_{z0}; \quad (2.35)$$

– співвідношення для площин $z = 0$ та $z = c$:

$$u_{xc} = u_{x0}; \quad u_{yc} = u_{y0}; \quad u_{zc} = u_{z0}.$$

Вирази u_{x0} , u_{y0} , u_{z0} в (2.35) відрізняються в залежності від того, до якої площини застосовано співвідношення. Наприклад, у співвідношенні $u_{xa} = u_{x0} + \varepsilon \cdot a$ мається на увазі, що значення $u_{x0} = u_x|_{x=0}$; у випадку $u_{xb} = u_{x0}$ – значення $u_{x0} = u_x|_{y=0}$; у випадку $u_{xc} = u_{x0}$ – значення $u_{x0} = u_x|_{z=0}$.

Для закріплення представницької моделі в просторі перед умовами періодичності задано умову в одній з кутових точок:

$$x = 0; \quad y = b; \quad z = 0; \quad u_x = u_y = u_z = 0. \quad (2.36)$$

Після завершення аналізу НДС у постпроцесорі обчислено середні значення напружень $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$.

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.23) пружні характеристики еквівалентного матеріалу b_{11} , b_{21} , b_{31} .

Моделювання розтягу в напрямку осі Y.

Для обчислення величина ε приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_y|_{y=b} = \varepsilon \cdot b$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0. \quad (2.37)$$

Граничні умови симетрії задано за виразами (2.33) і наступним чином:

$$\begin{aligned} - \text{на площині } x = a: \quad & u_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \\ - \text{на площині } y = b: \quad & u_y = \varepsilon \cdot b; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \\ - \text{на площині } z = c: \quad & u_z = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Граничні умови періодичності задано за допомогою (2.36) та:

– співвідношення для площин $x = 0$ та $x = a$:

$$u_{xa} = u_{x0}; \quad u_{ya} = u_{y0}; \quad u_{za} = u_{z0};$$

– співвідношення для площин $y = 0$ та $y = b$:

$$u_{xb} = u_{x0}; \quad u_{yb} = u_{y0} + \varepsilon \cdot b; \quad u_{zb} = u_{z0}; \quad (2.39)$$

– співвідношення для площин $z = 0$ та $z = c$:

$$u_{xc} = u_{x0}; \quad u_{yc} = u_{y0}; \quad u_{zc} = u_{z0}.$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.24) пружну характеристика еквівалентного матеріалу b_{22} .

Моделювання розтягу в напрямку осі Z.

Для обчислення ε приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_z|_{z=c} = \varepsilon \cdot c$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0. \quad (2.40)$$

Граничні умови симетрії задано за виразами (2.33) і наступним чином:

$$\begin{aligned} - \text{на площині } x = a: & \quad u_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \\ - \text{на площині } y = b: & \quad u_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \\ - \text{на площині } z = c: & \quad u_z = \varepsilon \cdot c; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Граничні умови періодичності задано за допомогою (2.36) та:

$$\begin{aligned} - \text{співвідношення для площин } x = 0 \text{ та } x = a: \\ u_{xa} = u_{x0}; \quad u_{ya} = u_{y0}; \quad u_{za} = u_{z0}; \\ - \text{співвідношення для площин } y = 0 \text{ та } y = b: \\ u_{xb} = u_{x0}; \quad u_{yb} = u_{y0}; \quad u_{zb} = u_{z0}; \\ - \text{співвідношення для площин } z = 0 \text{ та } z = c: \\ u_{xc} = u_{x0}; \quad u_{yc} = u_{y0}; \quad u_{zc} = u_{z0} + \varepsilon \cdot b. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.25) пружні характеристики еквівалентного матеріалу b_{23} , b_{33} .

Моделювання зсуву в площині XY.

Для обчислення величина γ приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_x|_{y=b} = \gamma \cdot b$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 10^{-3}. \quad (2.43)$$

Граничні умови симетрії задано за виразами (2.33) і наступним чином:

$$\begin{aligned} - \text{на площині } x = a: & \quad u_y = 0; \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \\ - \text{на площині } y = b: & \quad u_x = \gamma \cdot b; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \end{aligned} \quad (2.44)$$

– на площині $z = c$: $u_z = 0$; $\tau_{yz} = 0$; $\tau_{xz} = 0$.

Граничні умови періодичності задано за допомогою (2.36) та:

– співвідношення для площин $x = 0$ та $x = a$:

$$u_{xa} = u_{x0}; \quad u_{ya} = u_{y0}; \quad u_{za} = u_{z0};$$

– співвідношення для площин $y = 0$ та $y = b$:

$$u_{xb} = u_{x0} + \gamma \cdot b; \quad u_{yb} = u_{y0}; \quad u_{zb} = u_{z0}; \quad (2.45)$$

– співвідношення для площин $z = 0$ та $z = c$:

$$u_{xc} = u_{x0}; \quad u_{yc} = u_{y0}; \quad u_{zc} = u_{z0};$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.26) пружну характеристика еквівалентного матеріалу b_{66} .

Модельовання зсуву в площині YZ.

Для обчислення величина γ приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_y|_{z=c} = \gamma \cdot c$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0. \quad (2.46)$$

Граничні умови симетрії задано за виразами (2.33) і наступним чином:

– на площині $x = a$: $u_x = 0$; $\tau_{xy} = 0$; $\tau_{xz} = 0$;

– на площині $y = b$: $u_z = 0$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{yz} = 0$; (2.47)

– на площині $z = c$: $u_y = \gamma \cdot c$; $\sigma_z = 0$; $\tau_{xz} = 0$.

Граничні умови періодичності задано за допомогою (2.36) та:

– співвідношення для площин $x = 0$ та $x = a$:

$$u_{xa} = u_{x0}; \quad u_{ya} = u_{y0}; \quad u_{za} = u_{z0};$$

– співвідношення для площин $y = 0$ та $y = b$:

$$u_{xb} = u_{x0}; \quad u_{yb} = u_{y0}; \quad u_{zb} = u_{z0}; \quad (2.48)$$

– співвідношення для площин $z = 0$ та $z = c$:

$$u_{xc} = u_{x0}; \quad u_{yc} = u_{y0} + \gamma \cdot c; \quad u_{zc} = u_{z0}.$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.27) пружну характеристика еквівалентного матеріалу b_{44} .

Модельовання зсуву в площині XZ.

Для обчислення величина γ приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_x|_{z=c} = \gamma \cdot c$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0. \quad (2.49)$$

Граничні умови симетрії задано за виразами (2.33) і наступним чином:

$$\begin{aligned} - \text{на площині } x = a: & \quad u_z = 0; \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \\ - \text{на площині } y = b: & \quad u_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \\ - \text{на площині } z = c: & \quad u_x = \gamma \cdot c; \quad \sigma_z = 0; \quad \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Граничні умови періодичності задано за допомогою (2.36) та:

– співвідношення для площин $x = 0$ та $x = a$:

$$u_{xa} = u_{x0}; \quad u_{ya} = u_{y0}; \quad u_{za} = u_{z0};$$

– співвідношення для площин $y = 0$ та $y = b$:

$$u_{xb} = u_{x0}; \quad u_{yb} = u_{y0}; \quad u_{zb} = u_{z0}; \quad (2.51)$$

– співвідношення для площин $z = 0$ та $z = c$:

$$u_{xc} = u_{x0} + \varepsilon \cdot c; \quad u_{yc} = u_{y0}; \quad u_{zc} = u_{z0};$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (2.28) пружну характеристика еквівалентного матеріалу b_{55} .

Результати експериментів з умовами симетрії.

Розтяг у напрямку осі X.

На рисунках 2.11–2.16 наведено результати першого чисельного експерименту.

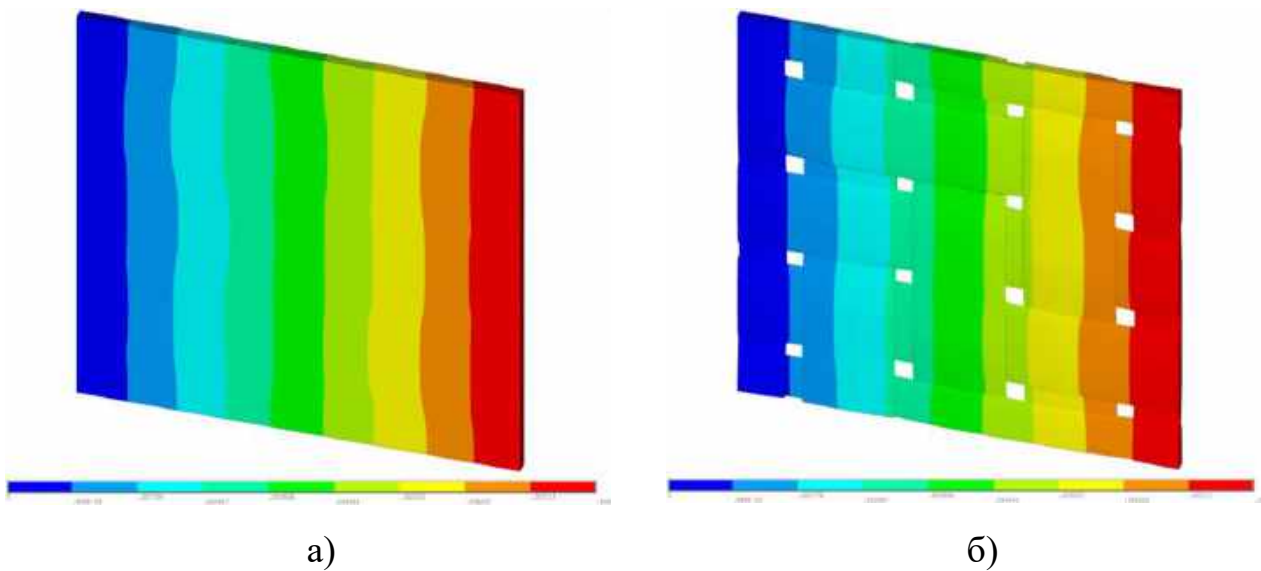


Рисунок 2.11. Розподіл переміщень u_x , м: а) всієї моделі б) волокон

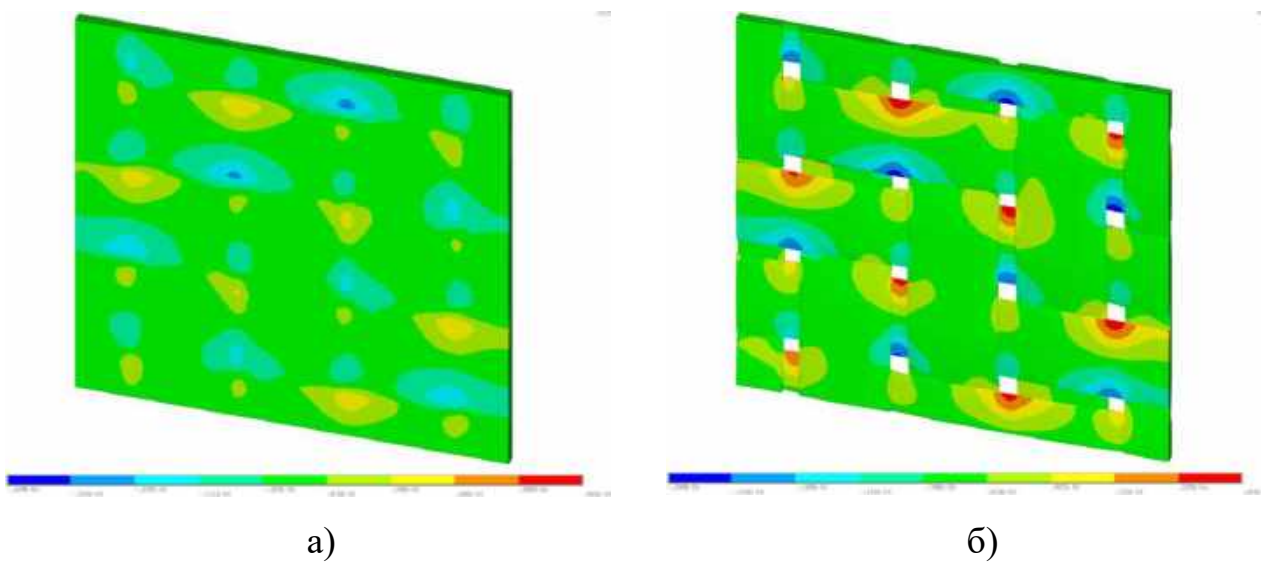


Рисунок 2.12. Розподіл переміщень u_y , м: а) всієї моделі б) волокон

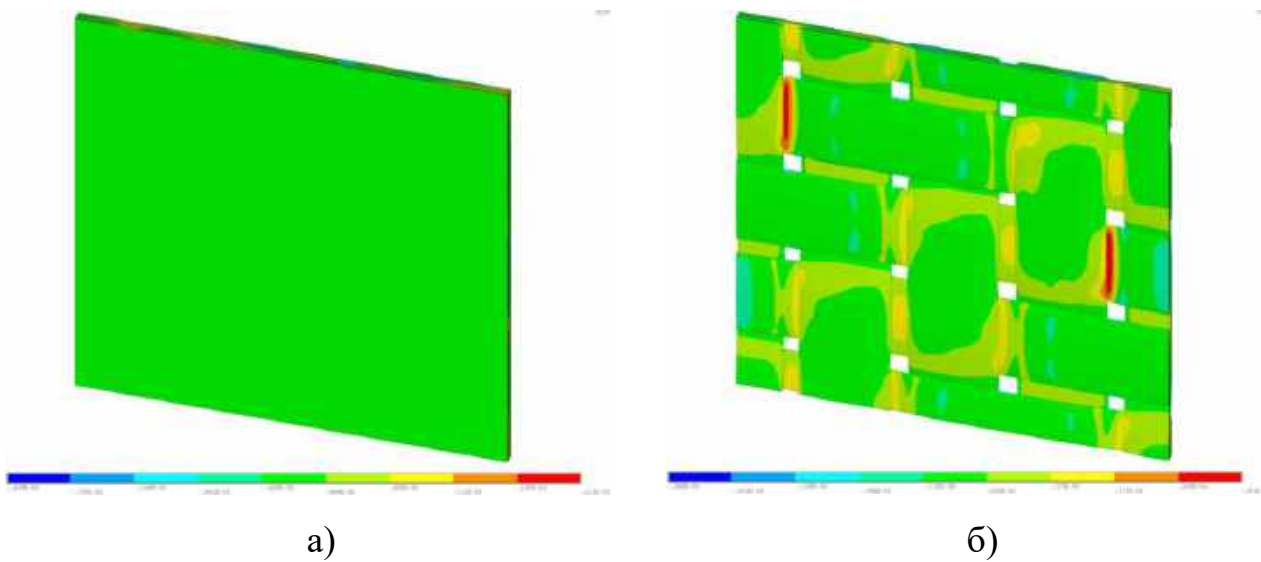


Рисунок 2.13. Розподіл переміщень u_z , м: а) всієї моделі б) волокон

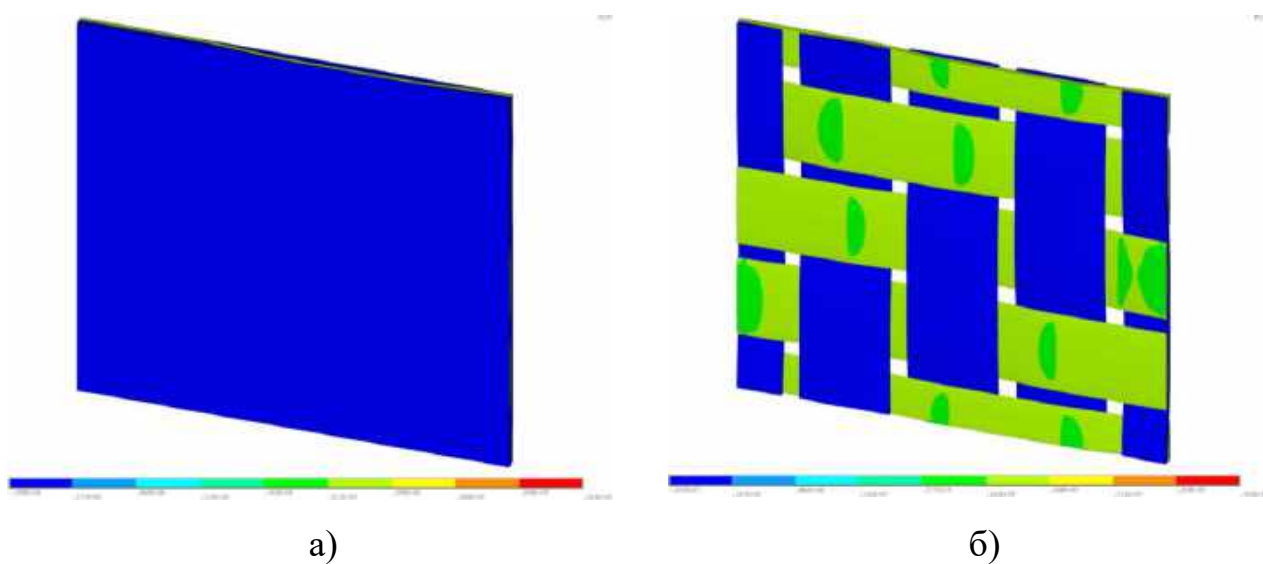


Рисунок 2.14. Розподіл нормальних напружень σ_x , Па: а) всієї моделі б) волокон

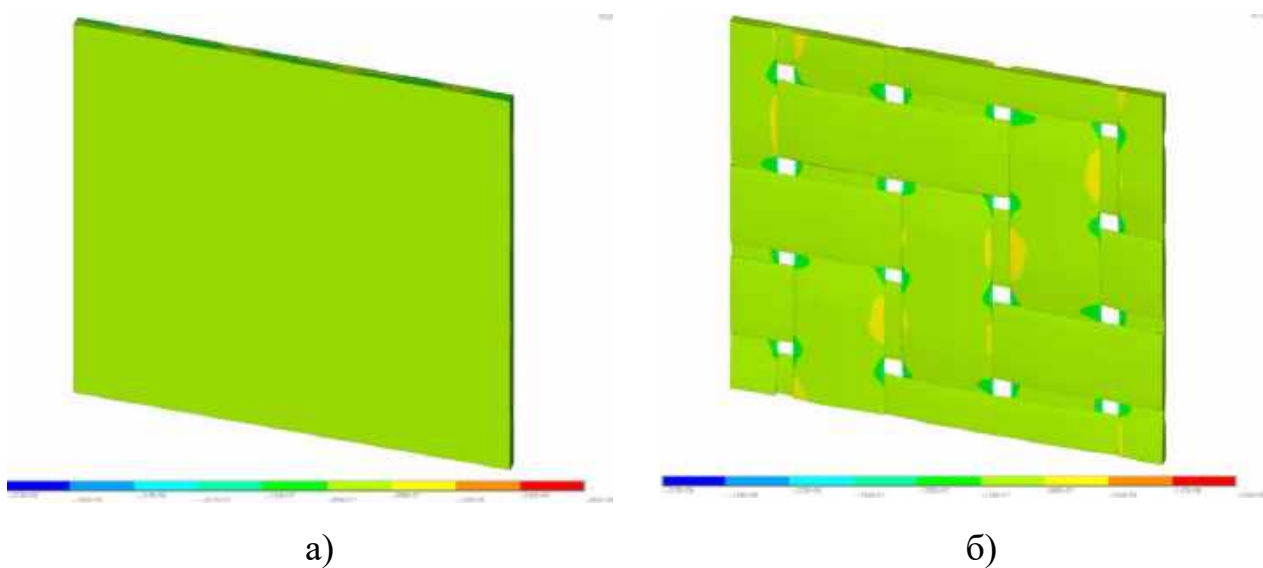


Рисунок 2.15. Розподіл нормальних напружень σ_y , Па: а) всієї моделі б) волокон

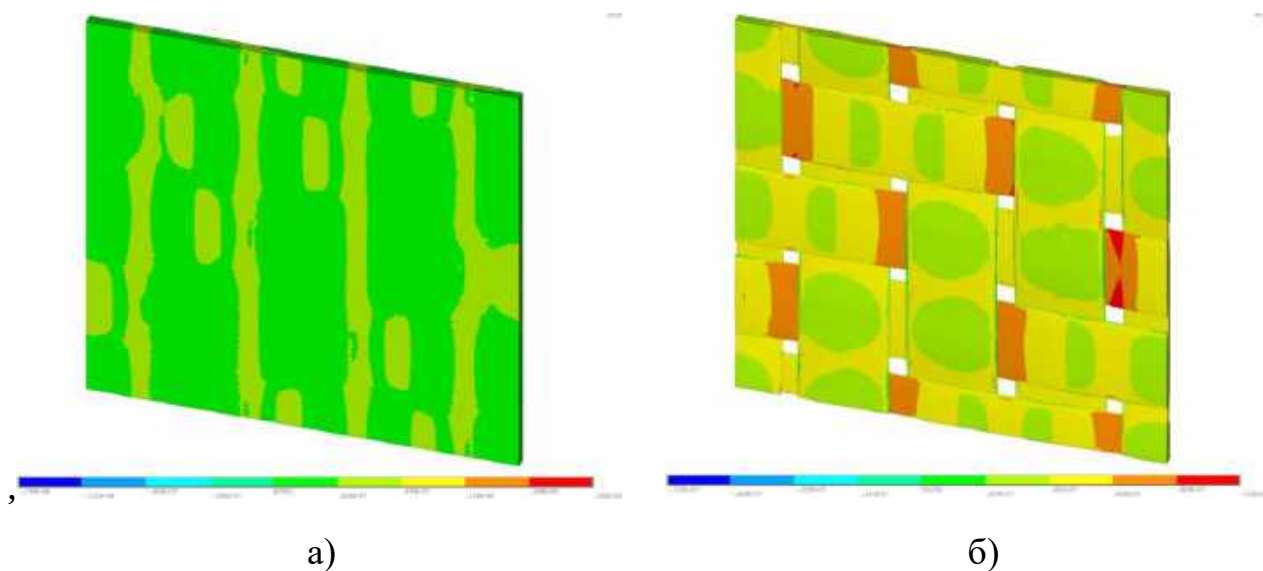


Рисунок 2.16. Розподіл нормальних напружень σ_z , Па: а) всієї моделі б) волокон

Визначені в постпроцесорі величини (2.29):

$$\langle \sigma_x \rangle = 0,51963 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$\langle \sigma_y \rangle = 0,46097 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\langle \sigma_z \rangle = 0,47651 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Компоненти матриці жорсткості (2.23):

$$b_{11} = 5,1963 \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$b_{21} = 0,46097 \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$b_{31} = 0,47651 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

Розтяг у напрямку осі Y.

Визначена в постпроцесорі величина (2.29):

$$\langle \sigma_y \rangle = 0,51963 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Компонента матриці жорсткості (2.24):

$$b_{22} = 5,1963 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

Розтяг в напрямку осі Z.

На рисунках 2.17, 2.18 наведено результати третього чисельного експерименту.

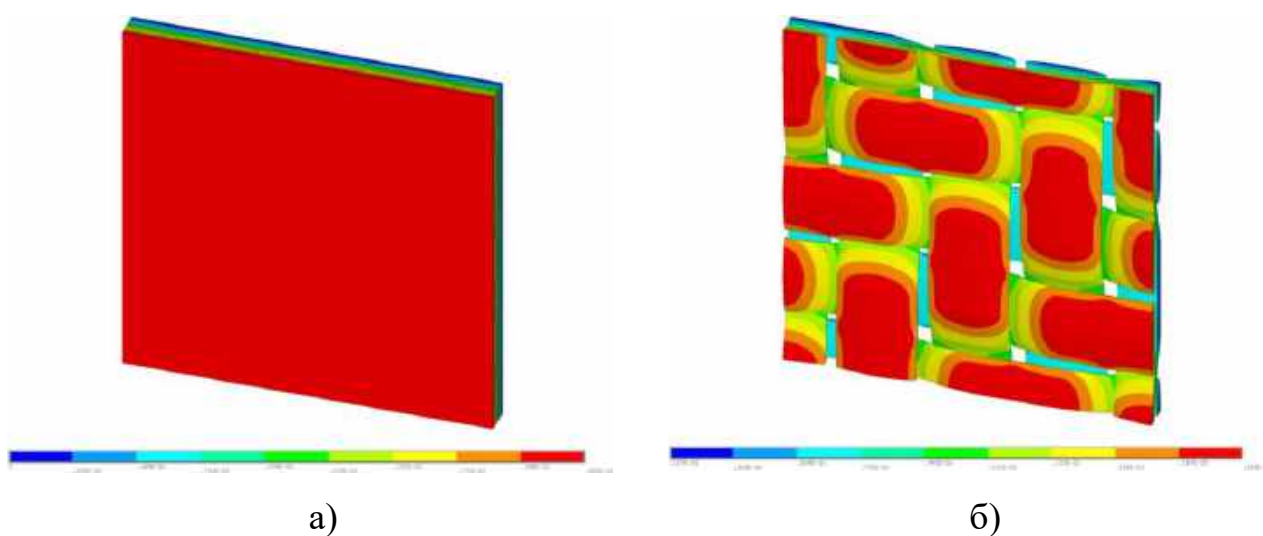


Рисунок 2.17. Розподіл переміщень u_z , м: а) всієї моделі б) волокон

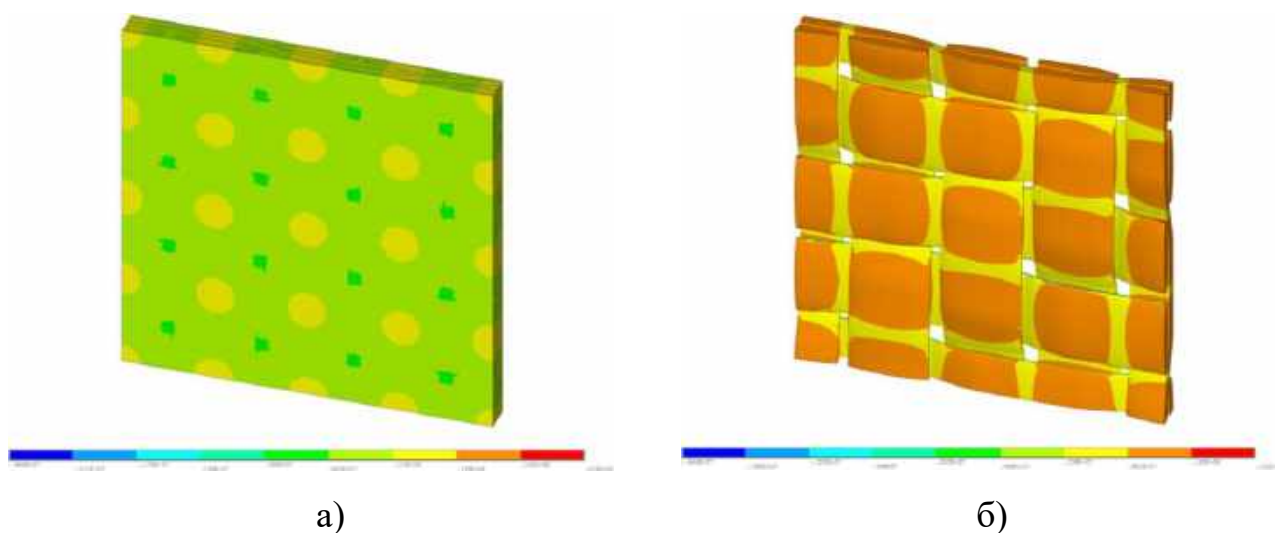


Рисунок 2.18. Розподіл нормальних напружень σ_z , Па: а) всієї моделі б) волокон

Визначена в постпроцесорі величина (2. 29):

$$\langle \sigma_z \rangle = 0,10535 \cdot 10^8 \text{ Па.}$$

Компонента матриці жорсткості (2.25):

$$b_{33} = 1,0535 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

Зсув у площині XY.

На рисунку 2.19 наведено результати четвертого чисельного експерименту.

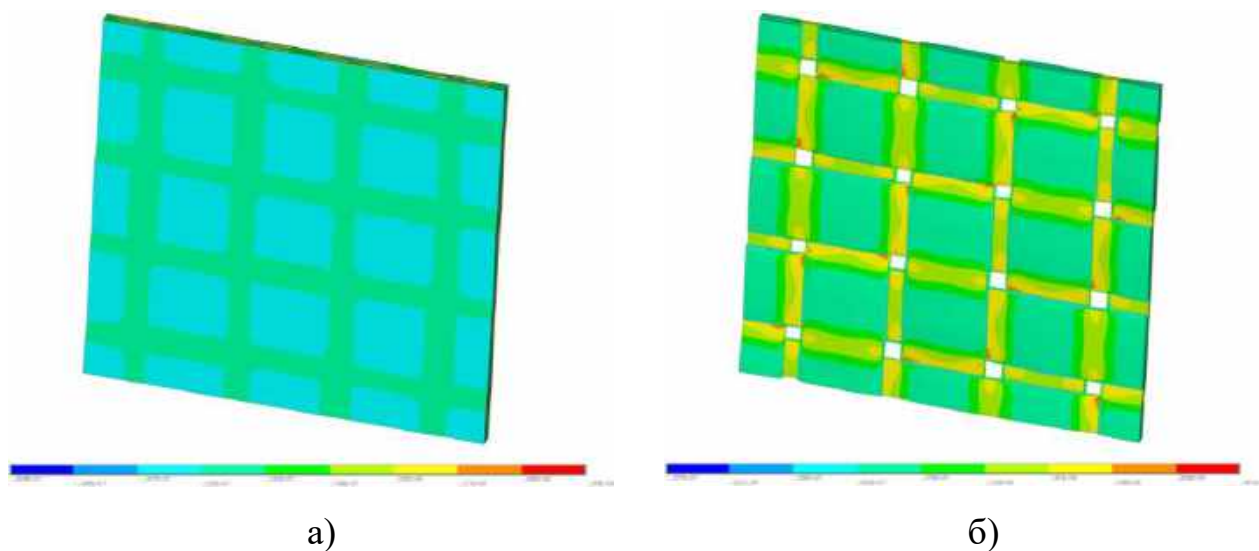


Рисунок 2.19. Розподіл дотичних напружень τ_{xy} , Па: а) всієї моделі б) волокон

Визначена в постпроцесорі величина (2.30):

$$\langle \tau_{xy} \rangle = 0,45402 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Компонента матриці жорсткості (2.26):

$$b_{66} = 0,45402 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

Зсув у площині YZ.

Визначена в постпроцесорі величина (2.30):

$$\langle \tau_{yz} \rangle = 0,25760 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Компонента матриці жорсткості (2.27):

$$b_{44} = 0,2576 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

Зсув у площині XZ.

На рисунку 2.20 наведено результати шостого чисельного експерименту.

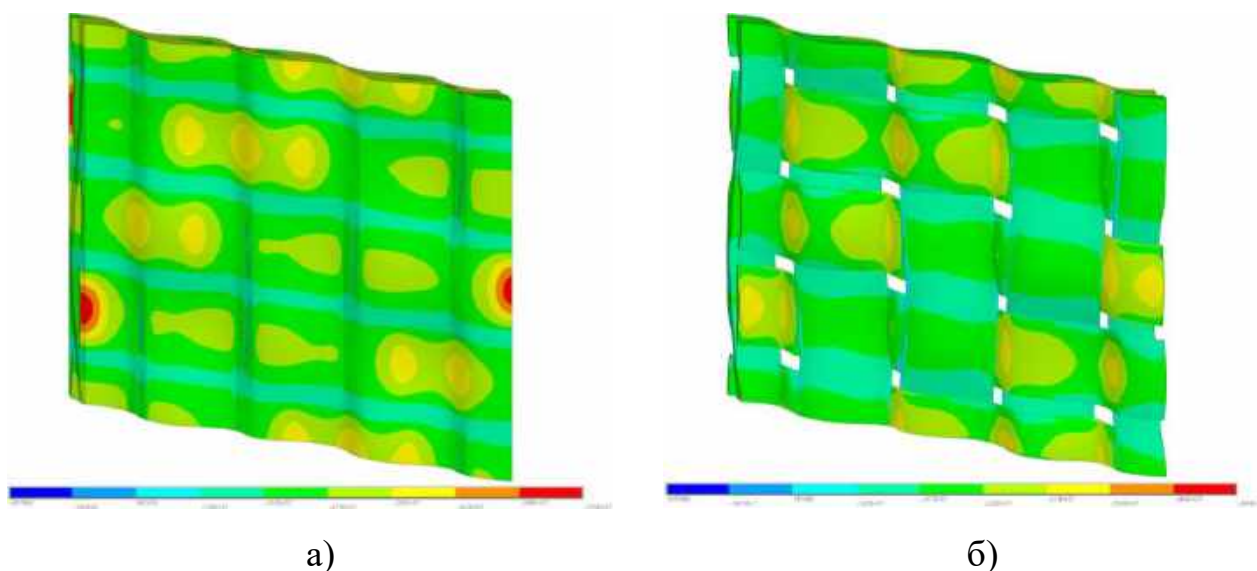


Рисунок 2.20. Розподіл дотичних напружень τ_{xz} , Па: а) всієї моделі б) волокон

Визначена в постпроцесорі величина (2.30):

$$\langle \tau_{xz} \rangle = 0,25760 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Компонента матриці жорсткості (2.28):

$$b_{55} = 0,2576 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

Матриця жорсткості має вигляд, Па:

$$B = 10^{10} \cdot \begin{pmatrix} 5,1963 & 0,46097 & 0,47651 & 0 & 0 & 0 \\ 0,46097 & 5,1963 & 0,47651 & 0 & 0 & 0 \\ 0,47651 & 0,47651 & 1,0535 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2576 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2576 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45402 \end{pmatrix}.$$

Матриця піддатливості, Па^{-1} :

$$A = 10^{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0,20126 & -0,00992 & -0,08655 & 0 & 0 & 0 \\ -0,00992 & 0,20126 & -0,08655 & 0 & 0 & 0 \\ -0,08655 & -0,08655 & 1,02751 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,88199 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,88199 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,20255 \end{pmatrix}.$$

Ефективні пружні характеристики еквівалентного гомогенного матеріалу визначено за допомогою (2.5) і наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Ефективні пружні сталі двовимірно армованого композиційного матеріалу

Модуль пружності, Мпа			Коефіцієнт Пуассона			Модуль зсуву, Мпа		
E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{xz}	ν_{yz}	G_{yz}	G_{xz}	G_{xy}
49687	49687	9732	0,04928	0,43002	0,43002	2576	2576	4540

2.2.3 Тривимірно армований композиційний матеріал

Згідно з наведеною раніше методикою здійснено розрахунок тривимірно армованого композиційного матеріалу (рис. 2.21).

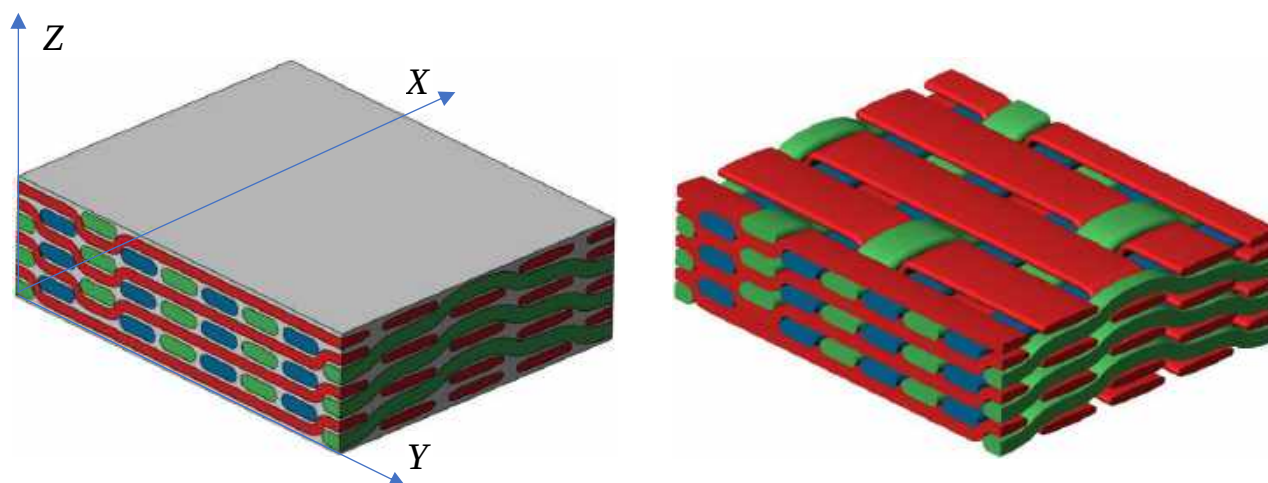


Рисунок 2.21. Представницька модель композиційного матеріалу

Для чисельного дослідження використовується мінімальний тривимірний представницький елемент об'єму, який періодично повторюється в усьому об'ємі композиційного матеріалу в трьох напрямках.

Моделювання представницького елемента об'єму здійснено в програмному пакеті SOLIDWORKS. Габаритні розміри моделі вздовж осі X ($a = 9$ мм); осі Y ($b = 11$ мм); осі Z ($c = 3,19$ мм). Початок системи координат у точці $x = 0, y = 0, z = 0$. Об'ємний вміст волокон 57 %. Для виключення взаємоперетину x -волокон основи, y -волокон утоку та z -волокон вони моделювалися зі змінним поперечним перерізом.

Для завдання характеристик матеріалів враховувалось, що напрям частини волокон співпадає з осями координат x та y , та існують нахиленні ділянки волокон.

Під час моделювання властивостей композиційного матеріалу введено три матеріали: матеріал 1 – для волокон в напрямку осі X , матеріал 2 – для волокон у напрямку осі Y , матеріал 3 – для в'язучого (рис. 2.22). Для завдання властивостей матеріалу нахилених ділянок волокон введено локальні системи координат.

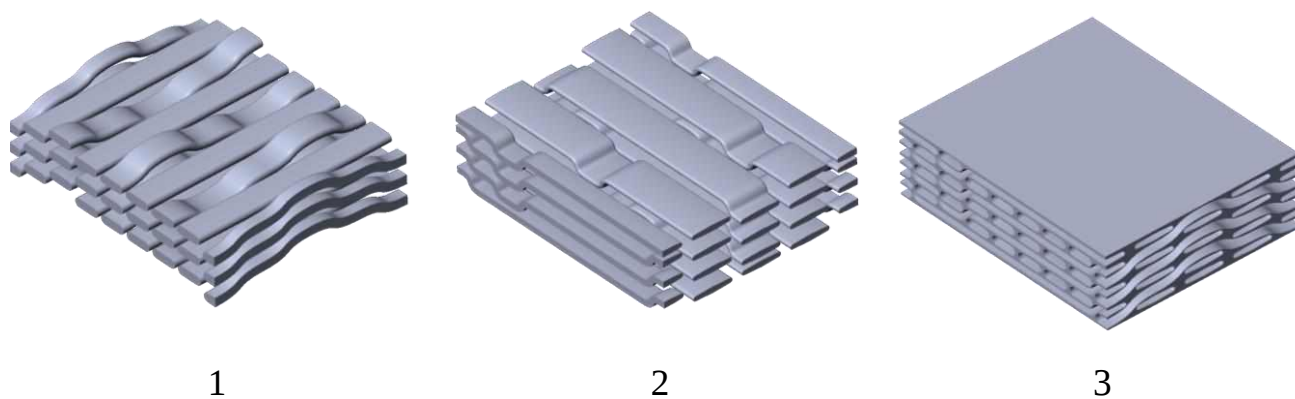


Рисунок 2.22. Компоненти композиційного матеріалу

Матеріали 1 та 2 задано як пружні анізотропні матеріали (рис. 2.23), а матеріал 3 задано як пружній ізотропний матеріал (рис. 2.10).

Параметри D_{ij} ($i, j = 1 \dots 6$) – це компоненти матриці піддатливості a_{ij} (2.4) для волокон відповідних матеріалів 1 і 2.

Anisotropic Elasticity for Material Number 1	
Anisotropic Elastic Matrix Options	
Temperature	T1
	0
D11	4E-12
D12	-8E-13
D13	-8E-13
D14	0
D15	0
D16	0
D22	7.6923E-11
D23	-1.6923E-11
D24	0
D25	0
D26	0
D33	7.6923E-11
D34	0
D35	0
D36	0
D44	7.6923E-11
D45	0
D46	0
D55	1.8769E-10
D56	0
D66	7.6923E-11

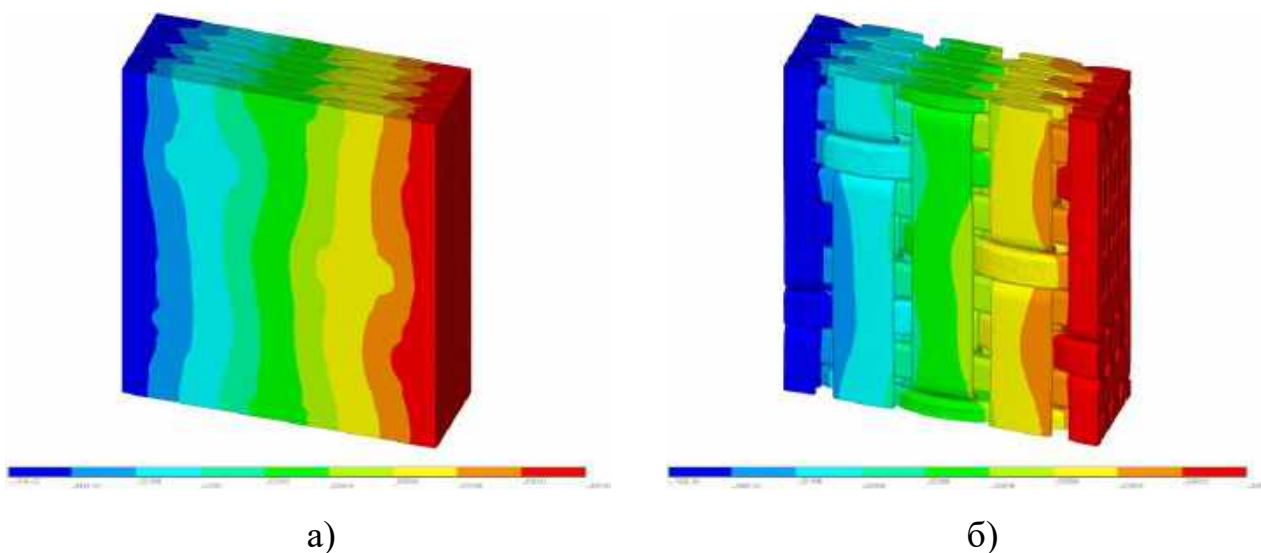
Anisotropic Elasticity for Material Number 2	
Anisotropic Elastic Matrix Options	
Temperature	T1
	0
D11	7.6923E-11
D12	-8E-13
D13	-1.6923E-11
D14	0
D15	0
D16	0
D22	4E-12
D23	-8E-13
D24	0
D25	0
D26	0
D33	7.6923E-11
D34	0
D35	0
D36	0
D44	7.6923E-11
D45	0
D46	0
D55	7.6923E-11
D56	0
D66	1.8769E-10

Рисунок 2.23. Характеристики матеріалів 1 та 2

Під час чисельного аналізу методом скінчених елементів у ПК ANSYS використано скінчений елемент SOLID 186, який має 20 вузлів та три ступеня свободи в кожному вузлі. Скінчено-елементна сітка математичної моделі має 2591012 елементів і 3992554 вузлів.

Результати чисельних експериментів.

На рисунках 2.24, 2.25 наведено результати розподілу переміщень u_x і напружень σ_x першого чисельного експерименту.

Рисунок 2.24. Розподіл переміщень u_x , м: а) усієї моделі б) волокон

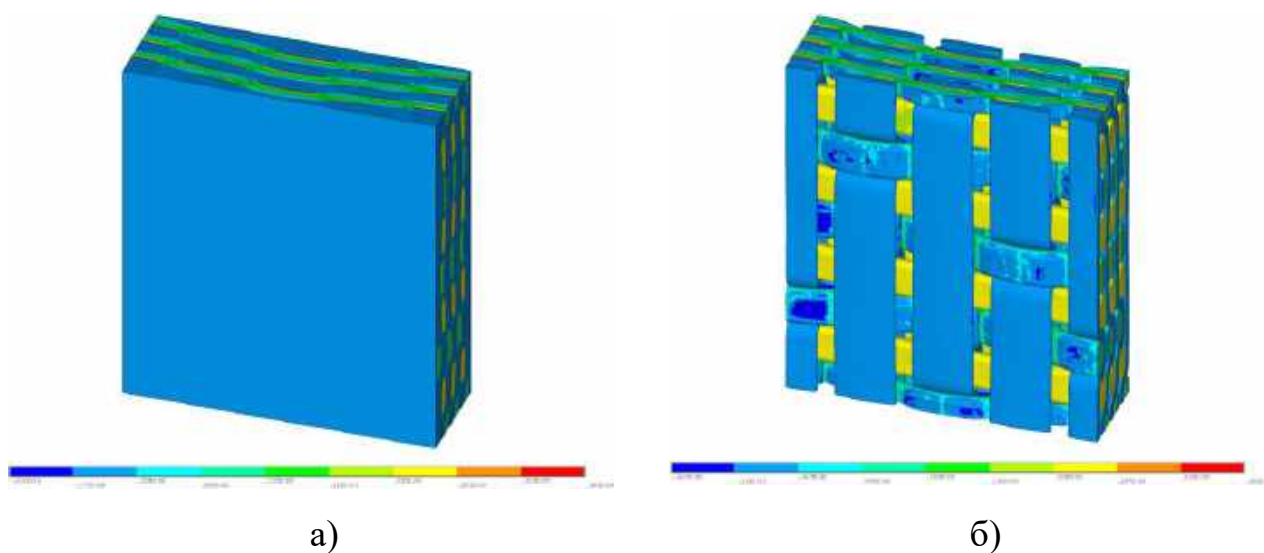


Рисунок 2.25. Розподіл нормальних напружень σ_x , Па: а) усієї моделі б) волокон

На рисунку 2.26 наведено результати розподілу дотичних напружень τ_{xy} четвертого чисельного експерименту.

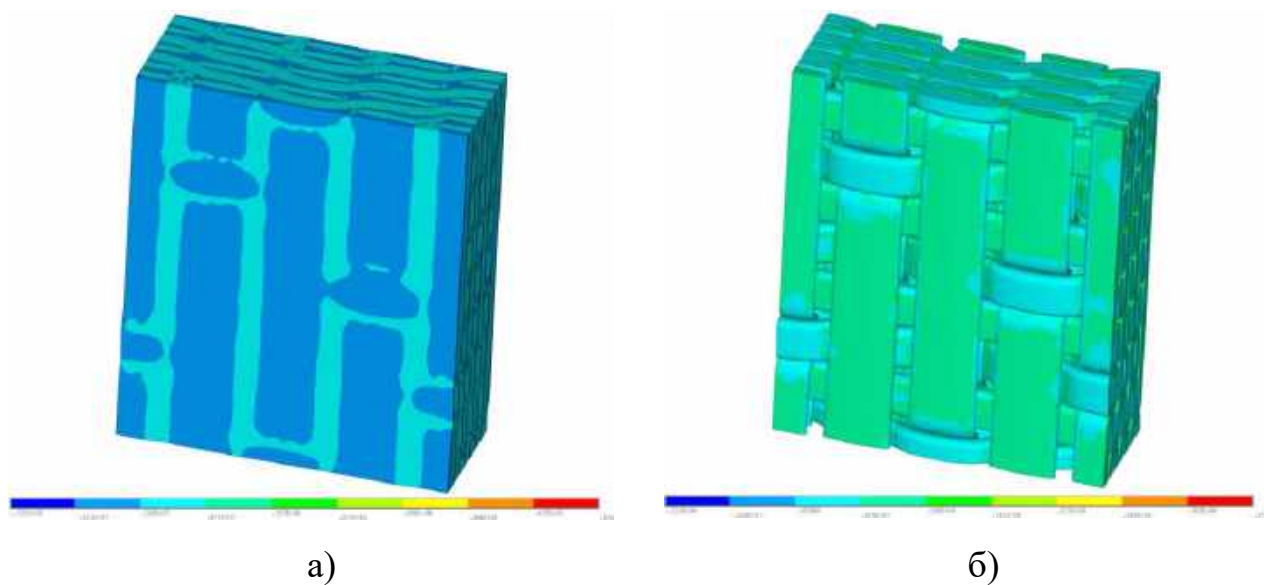


Рисунок 2.26. Розподіл дотичних напружень τ_{xy} , Па: а) усієї моделі б) волокон

На рисунку 2.27 наведено результати розподілу дотичних напружень τ_{xz} шостого чисельного експерименту.

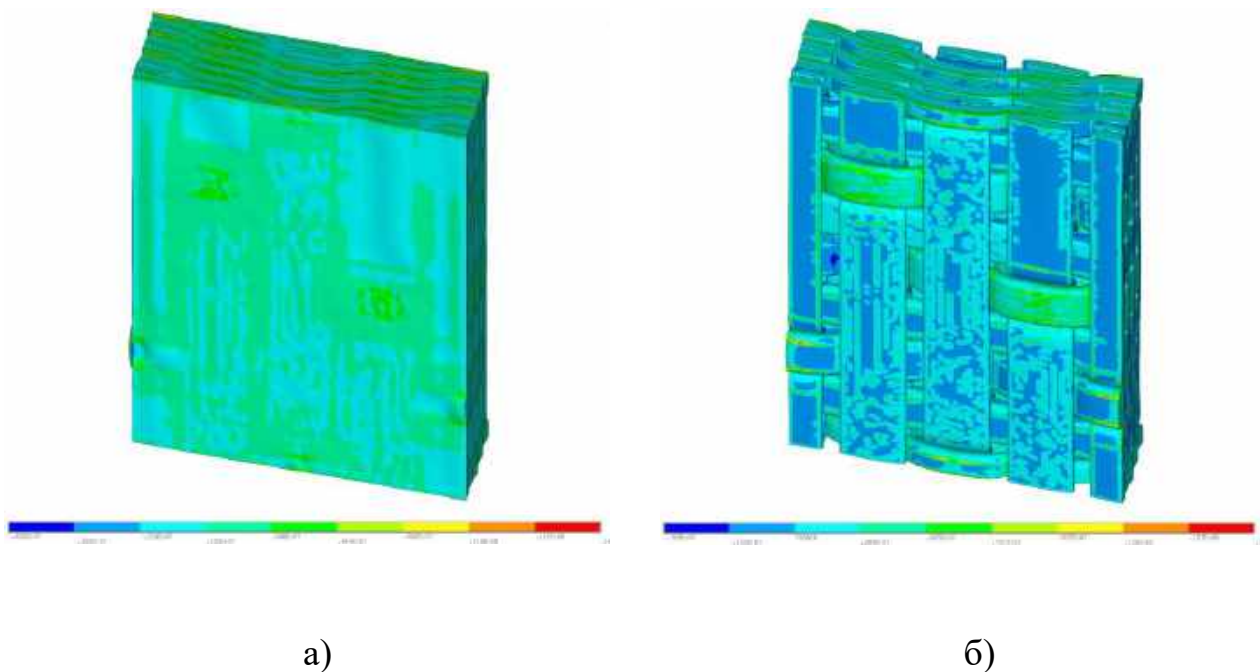


Рисунок 2.27. Розподіл дотичних напружень τ_{xz} , Па: а) усієї моделі б) волокон

В результаті чисельних розрахунків визначено пружні характеристики еквівалентного гомогенного матеріалу.

Матриця жорсткості має вигляд, Па

$$B = 10^{10} \cdot \begin{pmatrix} 6,1417 & 0,35992 & 0,1979 & 0 & 0 & 0 \\ 0,35992 & 4,895 & 0,19998 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1979 & 0,19998 & 0,7519 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,13638 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1462 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,37027 \end{pmatrix}.$$

Матриця податливості, Па^{-1}

$$A = 10^{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0,16474 & -0,01046 & -0,04058 & 0 & 0 & 0 \\ -0,01046 & 0,20720 & -0,05236 & 0 & 0 & 0 \\ -0,04058 & -0,05236 & 1,35457 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,3325 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,8399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,7007 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи співвідношення (2.5) визначено ефективні пружні характеристики тривимірно армованого композиційного матеріалу. Ефективні пружні характеристики композиційного матеріалу наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.4

Ефективні пружні сталі тривимірно армованого композиційного матеріалу

Модуль пружності, МПа			Модуль зсуву, МПа		
E_x	E_y	E_z	G_{yz}	G_{xz}	G_{xy}
60701	48263	7382	1364	1462	3703
Коефіцієнт Пуассона					
ν_{xy}	ν_{xz}	ν_{yz}	ν_{yx}	ν_{zx}	ν_{zy}
0,06346	0,24632	0,25269	0,05046	0,02996	0,03865

Загальну схему метода визначення ефективних пружних характеристик КМ за відомими пружними властивостями структурних компонентів представлено на рис. 2.28.



Рисунок 2.28. Схематичне зображення методу чисельного визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів

2.3 Висновки з розділу

За результатами, описаними вище, можна зробити наступні висновки:

1. Створено метод визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів за відомими пружними властивостями структурних компонентів. Процедура гомогенізації базується на математичному моделюванні представницьких об'ємів для різних структур армування. Запропоновано процедуру формування граничних умов для виконання мікромеханічного аналізу представницьких об'ємів, яка дозволяє точно моделювати локальний напружений стан в умовах однорідного середнього напруженого стану еквівалентного гомогенного матеріалу.

2. Виконано математичне моделювання представницьких елементів об'єму різної структури армування, для яких описано граничні умови.

3. За допомогою проведення серії чисельних експериментів визначено ефективні пружні характеристики еквівалентного гомогенного матеріалу для КМ різних структур армування.

4. Запропонований метод дозволяє виконувати аналіз локальних напружень і деформацій усередині компонентів представницького елемента об'єму КМ. Його перевагою є універсальність підходів, які адаптовані під вирішення задач чисельної гомогенізації композиційних матеріалів різної структури армування. Тому є можливість прогнозувати характеристики міцності та пружності для необхідних випадків навантажень і граничних умов конструкцій, виготовлених із КМ, що дозволяє оптимізувати та раціонально проєктувати їх структуру на стадії розрахунків.

4. За інформацією розділу отримані опорні дані для подальшого дослідження характеристик динамічної міцності деталей із КМ.

5. Метод потребує експериментальної верифікації.

6. Основні результати цього розділу дисертаційного дослідження опубліковано в роботах [12, 13].

2.4 Література до другого розділу

1. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. Strength of Rigid Polymer Materials. Zinatne. Riga, 1972. 572 p. (in Russian).
2. Jones Robert M. Mechanics of composite materials. *Taylor & Francis*. 2nd ed, 1999. P. 55-63.
3. Dvorak G.J. Micromechanics of Composite Material. Solid Mechanics and Its Applications., 2013. 442 p. DOI: 10.1007/978-94-007-4101-0.
4. Kollar L. P. Springer G. S. Mechanics of Composite Structures. Cambridge: *Cambridge University Press*, 2003. 480 p. DOI: 10.1017/CBO9780511547140.
5. Tucker III C. L., Liang, E. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation. *Composites Science and Technology*, 1999. Vol. 59. P. 655-671. DOI: 10.1016/s0266-3538(98)00120-1.
6. Pindera M.-J., Khatam H., Drago A. S., Bansal Y. Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: A critical review and emerging approaches. *Composites Part B: Engineering*, 2009. Vol. 40, P. 349-378. DOI: 10.1016/j.compositesb.2009.03.007.
7. Darya zadeh S., Lvov G.I., Seyed Rahim Kiahosseini. A new numerical method for determination of effective elastic constants in a composite with cross-ply fibers. *Вісник HTU «XIII»*, 2014. № 58. С. 169-180.
8. Huang, Z.-M. On micromechanics approach to stiffness and strength of unidirectional composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2018. DOI: 10.1177/0731684418811938.
9. Mechanics of Composite Materials, edited by G.P. Sendeckyj. Composite materials V. 2. New York. Academic Press, 1974. 503 p.
10. Digimat. The Nonlinear Multi-Scale Material and Structure Modeling Platform. URL: <https://hexagon.com/products/digimat> (дата звернення: 02.02.2024).
11. Luikov A. V. Heat-Conduction Theory. Moscow. Vysshaya Shkola, 1967. 625 p. (in. Russian).
12. Морозов А. В. Визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу. Вчені записки *Таврійського*

національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки. 2020. Т. 31. № 2. С. 44-51. DOI: 10.32838/2663-5941/2020.2-1/07.

13. Морозов А. В. Чисельне визначення ефективних пружних характеристик тривимірноармованого волокнистого композиційного матеріалу. *Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2020. № 8 (168). С. 121-129. DOI: 10.32620/aktt.2020.8.16.*

РОЗДІЛ 3 МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КРИТЕРІЮ МІЦНОСТІ ТРИВИМІРНО АРМОВАНОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ

Цей розділ присвячений розробці способу визначення параметрів критерію міцності тривимірно армованих композиційних матеріалів. При структурному аналізі елементів конструкцій композит розглядається як еквівалентний гомогенний анізотропний матеріал, на заключному етапі розрахунків використовуються критерії міцності, які встановлюють границі напружень, в яких КМ працює без пошкоджень.

Серед критеріїв міцності КМ наразі широке застосування мають квадратичні критерії, які враховують різницю в границях міцності при розтягу та стиску й не містять надлишкових параметрів. Квадратичні критерії для анізотропних матеріалів запропоновано в роботах Хілла [1] та Мізеса [2] для визначення умов початку плинності. Загальну форму квадратичного критерію міцності запропоновано в роботі [3] для анізотропних матеріалів, які мають різну міцність при розтягу й стиску.

Оцінювання міцності елементів конструкцій з КМ, що експлуатуються при тривісному напруженому стані, зазвичай здійснюється за феноменологічними критеріями – математичними виразами, що включають компоненти тензора напружень і матеріальні константи, які визначаються за допомогою проведення повної сукупності потрібних фізичних експериментів. Точний аналіз з використанням квадратичних критеріїв обмежено через труднощі, що пов'язані з визначенням умов міцності при двовісному випробуванні КМ [4]. Існує низка добре розроблених методик визначення границь міцності односпрямованих КМ [5, 6], але методи визначення границь міцності композитів з ортотропними властивостями мало розроблені, оскільки потребують експериментальних випробувань та пов'язаних із цим значних матеріальних і часових витрат. Також проведення деяких експериментів не завжди повністю здійснимо. Альтернативним підходом є чисельне моделювання руйнування КМ на базі відомих механічних властивостей волокон і матриці.

3.1 Квадратичні критерії міцності ортотропних матеріалів

Для ортотропного матеріалу в системі прямокутних декартових координат, осі якої перпендикулярні до площин симетрії пружних властивостей, квадратичний критерій містить 12 незалежних констант [7]:

$$F_{11}\sigma_x^2 + F_{22}\sigma_y^2 + F_{33}\sigma_z^2 + 2F_{12}\sigma_x\sigma_y + 2F_{23}\sigma_y\sigma_z + 2F_{13}\sigma_x\sigma_z + F_{44}\tau_{xy}^2 + F_{55}\tau_{yz}^2 + F_{66}\tau_{xz}^2 + F_1\sigma_x + F_2\sigma_y + F_3\sigma_z \leq 1. \quad (3.1)$$

Непов'язані коефіцієнти $F_1, F_2, F_3, F_{11}, F_{22}, F_{33}, F_{44}, F_{55}, F_{66}$ визначаються з одновісних випробувань на розтяг (стиск) та на зсув. Пов'язані коефіцієнти F_{23}, F_{13}, F_{12} потрібно визначати зі складних двовісних експериментальних випробувань, де їх значення значно залежать від розкиду експериментальних даних та істотно впливають на вид поверхні міцності. У роботі [8] визначено необхідні та достатні умови існування поверхні міцності ортотропного матеріалу.

Непов'язані коефіцієнти для узагальненого критерію міцності Мізеса мають такі значення (індекс «+» означає розтяг, індекс «-» означає стиск) [7]:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\sigma_x^+} - \frac{1}{\sigma_x^-}; & F_2 &= \frac{1}{\sigma_y^+} - \frac{1}{\sigma_y^-}; & F_3 &= \frac{1}{\sigma_z^+} - \frac{1}{\sigma_z^-}; \\ F_{11} &= \frac{1}{\sigma_x^+\sigma_x^-}; & F_{22} &= \frac{1}{\sigma_y^+\sigma_y^-}; & F_{33} &= \frac{1}{\sigma_z^+\sigma_z^-}; \\ F_{44} &= \frac{1}{(\tau_{yz})^2}; & F_{55} &= \frac{1}{(\tau_{xz})^2}; & F_{66} &= \frac{1}{(\tau_{xy})^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де $\sigma_x^+, \sigma_y^+, \sigma_z^+, \sigma_x^-, \sigma_y^-, \sigma_z^-$ – границі міцності при одновісному розтягу та стиску в трьох напрямках анізотропії;

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – границі міцності при зсуві у трьох площинах симетрії.

На практиці важко виконати експерименти, необхідні для отримання пов'язаних коефіцієнтів F_{23}, F_{13}, F_{12} . Щоб уникнути складних експериментів, були запропоновані наближені чисельні вирази для F_{ij} . Один із виразів визначено зі спостереження, що квадратне рівняння характеризується своїми дискримінантами. Коли всі, крім будь-яких двох нормальних напружень в критерії міцності (3.1), дорівнюють нулю, дискримінант становить:

$$\Delta_{ij} = F_{ii}F_{jj} - F_{ij}^2, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (i \neq j). \quad (3.3)$$

Для того, щоб квадратичне рівняння представляло замкнену область (щоб напруження залишалися скінченими), кожен з трьох дискримінантів повинен бути додатним.

У роботі [9] визначено, що квадратичний критерій міцності зводиться до критерію Мізеса для ізотропних матеріалів, якщо

$$\frac{F_{ij}}{\sqrt{F_{ii}F_{jj}}} = -\frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Отже для диференціального рівняння еліптичного типу пов'язані коефіцієнти критерію міцності розраховуються за виразами

$$F_{12} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sigma_x^+ \sigma_x^- \sigma_y^+ \sigma_y^-}}; \quad F_{23} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sigma_y^+ \sigma_y^- \sigma_z^+ \sigma_z^-}}; \quad F_{13} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sigma_x^+ \sigma_x^- \sigma_z^+ \sigma_z^-}}. \quad (3.5)$$

3.2 Чисельна процедура визначення параметрів критерію міцності

Для визначення коефіцієнтів квадратичного критерію (3.1) потрібно провести дев'ять чисельних експериментів, які моделюють локальний напружено-деформований стан у межах представницького об'єму в умовах однорідного (у середньому) напруженого стану композита:

- при розтягу в напрямках осей X, Y, Z для визначення границь міцності $\sigma_x^+, \sigma_y^+, \sigma_z^+$;
- при стиску в напрямках осей X, Y, Z для визначення границь міцності $\sigma_x^-, \sigma_y^-, \sigma_z^-$;
- при чистому зсуві в площинах XY, YZ, XZ для визначення границь міцності $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$.

Відмінність у границях міцності при розтягу та стиску визначається при обробці результатів чисельних експериментів, тому кількість експериментів зводиться до шести. Це дозволяє визначити всі параметри критерію міцності за допомогою

наступних досліджень напружено-деформованого стану представницького елемента об'єму тривимірно армованого КМ (рис. 2.21):

1. Одновісний розтяг (стиск) у напрямку осі X , середні напруження при цьому $\langle \sigma_x \rangle = 10^6 \text{ Па}$;
2. Одновісний розтяг (стиск) в напрямку осі Y , $\langle \sigma_y \rangle = 10^6 \text{ Па}$;
3. Одновісний розтяг (стиск) в напрямку осі Z , $\langle \sigma_z \rangle = 10^6 \text{ Па}$;
4. Чистий зсув в площині XY , середні деформації при цьому $\langle \gamma_{xy} \rangle = 10^{-3}$;
5. Чистий зсув в площині YZ , $\langle \gamma_{yz} \rangle = 10^{-3}$;
6. Чистий зсув в площині XZ , $\langle \gamma_{xz} \rangle = 10^{-3}$;

Вихідні дані, щодо властивостей компонентів КМ наступні:

- границя міцності при розтягу і стиску волокна $\sigma_f = 4900 \text{ МПа}$;
- границя міцності при розтягу матриці $\sigma_m^+ = 82,1 \text{ МПа}$;
- границя міцності при стиску матриці $\sigma_m^- = 128 \text{ МПа}$.

Матрицю коефіцієнтів тривимірно армованого КМ a_{ij} , визначену в попередньому розділі наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Матриця коефіцієнтів a_{ij} , Па^{-1}

a_{ij}	1	2	3
1	0,16474E-10	-0,01046E-10	-0,04058E-10
2	-0,01046E-10	0,20720E-10	-0,05236E-10
3	-0,04058E-10	-0,05236E-10	1,35457E-10

Експерименти на розтяг проводяться з використанням граничних умов симетрії за виразами (2.33).

Перший чисельний експеримент з міцності – одновісний розтяг (стиск) в напрямку осі X .

Моделювання одновісного (в середньому) напруженого стану при розтягу в напрямку осі X виконується при середньому напруженні $\langle \sigma_x \rangle = 10^6 \text{ Па}$. Задане навантаження відповідає наступним деформаціям (2.4):

$$\langle \varepsilon_x \rangle = \langle \sigma_x \rangle \cdot a_{11}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = \langle \sigma_x \rangle \cdot a_{21}; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = \langle \sigma_x \rangle \cdot a_{31}. \quad (3.6)$$

Переміщення, що відповідають цим деформаціям використовуються як граничні умови на площинах моделі:

$$u_x|_{x=a} = \langle \varepsilon_x \rangle \cdot a = u_x; \quad u_y|_{y=b} = \langle \varepsilon_y \rangle \cdot b = u_y; \quad u_z|_{z=c} = \langle \varepsilon_z \rangle \cdot c = u_z. \quad (3.7)$$

Після розрахунку напружено-деформованого стану представницького елемента об'єму аналізується розподіл еквівалентних за Мізесом напружень S_{eqv} . Визначаються локальне максимальне еквівалентне напруження $S_{eqv_max}^f$ волокон та коефіцієнт допустимого навантаження:

$$k_f = \frac{\sigma_f}{S_{eqv_max}^f}. \quad (3.8)$$

Далі обчислюється граничне напруження, що призводить до руйнування волокон при розтягу композита вздовж осі X :

$$\sigma_{f_x} = k_f \cdot \sigma. \quad (3.9)$$

Для матриці визначаються локальне максимальне еквівалентне напруження за Мізесом $S_{eqv_max}^m$, а також коефіцієнти допустимого навантаження при розтягу та стиску:

$$k_m^+ = \frac{\sigma_m^+}{S_{eqv_max}^m}, \quad k_m^- = \frac{\sigma_m^-}{S_{eqv_max}^m}. \quad (3.10)$$

Розраховується граничне напруження, що призводить до руйнування матриці при розтягу та стиску композита вздовж осі X :

$$\sigma_{m_x}^+ = k_m^+ \cdot \sigma, \quad \sigma_{m_x}^- = k_m^- \cdot \sigma. \quad (3.11)$$

Із двох значень σ_{f_x} та $\sigma_{m_x}^+$ вибирається менше, яке буде розрахунковою границею міцності σ_x^+ композита при розтягу в напрямку осі X:

$$\begin{aligned}\sigma_{f_x} < \sigma_{m_x}^+ &\rightarrow \sigma_x^+ = \sigma_{f_x} \\ \sigma_{f_x} > \sigma_{m_x}^+ &\rightarrow \sigma_x^+ = \sigma_{m_x}^+.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Аналогічно з двох значень σ_{f_x} та $\sigma_{m_x}^-$ вибирається менше, щоб вважати його розрахунковою границею міцності σ_x^- композита при стиску в напрямку осі X:

$$\begin{aligned}\sigma_{f_x} < \sigma_{m_x}^- &\rightarrow \sigma_x^- = \sigma_{f_x} \\ \sigma_{f_x} > \sigma_{m_x}^- &\rightarrow \sigma_x^- = \sigma_{m_x}^-.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Таким чином визначаються границі міцності при розтягу й стиску σ_x^+ та σ_x^- в напрямку осі X.

Другий чисельний експеримент з міцності – одновісний розтяг (стиск) в напрямку осі Y.

Моделювання одновісного напруженого стану при розтягу в напрямку осі Y під впливом $\langle \sigma_y \rangle = 10^6$ Па. Задане навантаження відповідає наступним деформаціям:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle \cdot a_{12}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = \langle \sigma_y \rangle \cdot a_{22}; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = \langle \sigma_y \rangle \cdot a_{32}. \quad (3.14)$$

Розраховуються переміщення, що відповідають цим деформаціям на граничних площинах моделі за формулами (3.7).

Після розрахунку НДС представницького елемента об'єму аналізується розподіл еквівалентних за Мізесом напружень S_{eqv} . Визначається локальне максимальне еквівалентне напруження для волокон $S_{eqv_max}^f$.

Визначається коефіцієнт допустимого навантаження k_f для волокон за формулою (3.8) та обчислюється граничне напруження, що призводить до руйнування волокон при розтягу композита вздовж осі Y:

$$\sigma_{f_y} = k_f \cdot \sigma. \quad (3.15)$$

Для матриці визначаються локальне максимальне еквівалентне напруження за Мізесом $S_{eqv_max}^m$, а також коефіцієнти допустимого навантаження k_m^+ та k_m^- за

формулами (3.10). Розраховується граничне напруження, що призводить до руйнування матриці при розтягу та стиску композита вздовж осі Y:

$$\sigma_{m_y}^+ = k_m^+ \cdot \sigma, \quad \sigma_{m_y}^- = k_m^- \cdot \sigma. \quad (3.16)$$

Використовуючи формули (3.12) і (3.13) та змінивши в них індекс (x) на (y), визначаються границі міцності при розтягу і стиску σ_y^+ та σ_y^- в напрямку осі Y.

Третій чисельний експеримент з міцності – одновісний розтяг (стиск) в напрямку Z.

Моделювання одновісного напруженого стану при розтягу в напрямку осі Z під впливом $\langle \sigma_z \rangle = 10^6$ Па. Задане навантаження відповідає наступним деформаціям:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = \langle \sigma_z \rangle \cdot a_{13}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = \langle \sigma_z \rangle \cdot a_{23}; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = \langle \sigma_z \rangle \cdot a_{33}. \quad (3.17)$$

Розраховуються переміщення, що відповідають цим деформаціям на граничних площинах моделі за формулами (3.7).

Після розрахунку НДС представницького елемента об'єму аналізується розподіл еквівалентних за Мізесом напружень S_{eqv} . Знаходиться локальне максимальне еквівалентне напруження для волокон $S_{eqv_max}^f$.

Визначається коефіцієнт допустимого навантаження k_f для волокон за формулою (3.8) та обчислюється граничне напруження, що призводить до руйнування волокон при розтягу композита вздовж осі Z:

$$\sigma_{f_z} = k_f \cdot \sigma. \quad (3.18)$$

Для матриці визначаються локальне максимальне еквівалентне напруження за Мізесом $S_{eqv_max}^m$, а також коефіцієнти допустимого навантаження k_m^+ та k_m^- за формулами (3.10). Розраховується граничне напруження, яке призводить до руйнування матриці при розтягу та стиску композита вздовж осі Z:

$$\sigma_{m_z}^+ = k_m^+ \cdot \sigma, \quad \sigma_{m_z}^- = k_m^- \cdot \sigma. \quad (3.19)$$

Використовуючи формули (3.12) і (3.13) та змінивши в них індекс (x) на (z), також визначаються границі міцності при розтягу і стиску σ_z^+ та σ_z^- в напрямку осі Z.

Четвертий чисельний експеримент з міцності – чистий зсув в площині ХУ.

Використовується четвертий чисельний експеримент з визначення пружних сталих КМ (розділ 2.2). Навантаження задається у вигляді деформації $\gamma_{xy} = 10^{-3}$. Така деформація забезпечується переміщенням $u_x|_{y=b} = \gamma \cdot b$. Середні значення компонентів тензору деформацій відповідають (2.43). Умови симетрії задаються за виразами (2.33), граничні умови – (2.44).

Після аналізу розподілу еквівалентних за Мізесом напружень S_{eqv} знаходиться локальне максимальне еквівалентне напруження для волокон $S_{eqv_max}^f$. Це дає змогу визначити коефіцієнт допустимого навантаження k_f для волокон за формулою (3.8) і границю їх міцності при зсуві композита в площині ХУ:

$$\tau_{f_xy} = k_f \cdot \gamma \cdot G_{xy}. \quad (3.20)$$

Для матриці визначаються локальне максимальне еквівалентне напруження за Мізесом $S_{eqv_max}^m$, коефіцієнт допустимого навантаження k_m^+ , оскільки використовується менша з границь міцності при розтягу й стиску $\sigma_m^+ < \sigma_m^-$, за формулою (3.10) та границя міцності при зсуві композита в площині ХУ:

$$\tau_{m_xy} = k_m^+ \cdot \gamma \cdot G_{xy}. \quad (3.21)$$

Із двох значень τ_{f_xy} та τ_{m_xy} вибирається менше, яке буде розрахунковою границею міцності τ_{xy} композита при чистому зсуві в площині ХУ.

П'ятий чисельний експеримент з міцності – чистий зсув в площині YZ.

Використовується п'ятий чисельний експеримент з визначення пружних сталих КМ (розділ 2.2). Навантаження задається у вигляді деформації $\gamma_{yz} = 10^{-3}$. Така деформація забезпечується переміщенням $u_y|_{z=c} = \gamma \cdot c$. Середні значення компонентів тензору деформацій відповідно до (2.46). Умови симетрії задаються за виразами (2.33), граничні умови (2.47).

Після аналізу розподілу еквівалентних за Мізесом напружень S_{eqv} знаходиться локальне максимальне еквівалентне напруження для волокон $S_{eqv_max}^f$. Це дає змогу

визначити коефіцієнт допустимого навантаження k_f для волокон за формулою (3.8) та границю їх міцності при зсуві композита в площині YZ:

$$\tau_{f_yz} = k_f \cdot \gamma \cdot G_{yz}. \quad (3.22)$$

Для матриці визначаються локальне максимальне еквівалентне напруження за Мізесом $S_{eqv_max}^m$, коефіцієнт допустимого навантаження k_m^+ , оскільки використовується менша з границь міцності при розтягу та стиску $\sigma_m^t < \sigma_m^c$, за формулою (3.10) та границя міцності при чистому зсуві в площині YZ:

$$\tau_{m_yz} = k_m^+ \cdot \gamma \cdot G_{yz}. \quad (3.23)$$

Із двох значень τ_{f_yz} та τ_{m_yz} вибирається менше, яке буде розрахунковою границею міцності τ_{yz} композита при чистому зсуві в площині YZ.

Шостий чисельний експеримент з міцності – зсув в площині XZ.

Використовується шостий чисельний експеримент з визначення пружних сталих КМ (розділ 2.2). Навантаження задається у вигляді деформації $\gamma_{xz} = 10^{-3}$. Така деформація забезпечується переміщенням $u_x|_{z=c} = \gamma \cdot c$. Середні значення компонентів тензору деформацій відповідно до (2.49). Умови симетрії задаються за виразами (2.33), граничні умови (2.50).

Після аналізу розподілу еквівалентних за Мізесом напружень S_{eqv} знаходиться локальне максимальне еквівалентне напруження для волокон $S_{eqv_max}^f$.

Визначаються коефіцієнт допустимого навантаження k_f для волокон за формулою (3.8) та границя міцності волокон при зсуві композита в площині XZ:

$$\tau_{f_xz} = k_f \cdot \gamma \cdot G_{xz}. \quad (3.24)$$

Для матриці визначаються локальне максимальне еквівалентне напруження за Мізесом $S_{eqv_max}^m$, коефіцієнт допустимого навантаження k_m^+ , оскільки використовується менша з границь міцності на розтяг та стиск $\sigma_m^t < \sigma_m^c$, за формулою (3.10) та границя міцності при зсуві композита в площині XZ:

$$\tau_{m_xz} = k_m^+ \cdot \gamma \cdot G_{xz}. \quad (3.25)$$

З двох значень τ_{f_xz} та τ_{m_xz} вибирається менше, яке буде розрахунковою границею міцності τ_{xz} композита при чистому зсуві в площині XZ.

3.3 Результати чисельних експериментів

Результати першого чисельного експерименту з міцності.

Визначено деформації:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 1,64742 \cdot 10^{-5}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = -1,046 \cdot 10^{-6}; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = -4,058 \cdot 10^{-6}.$$

Визначено переміщення:

$$u_x|_{x=a} = 1,4827 \cdot 10^{-4} \text{ мм}; \quad u_y|_{y=b} = -0,11506 \cdot 10^{-4} \text{ мм};$$

$$u_z|_{z=c} = -0,12945 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

Максимальне локальне напруження для волокон (рис. 3.1):

$$S_{eqv_max}^f = 4,507 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для волокон:

$$k_f = 1087,2.$$

Граничне напруження, що призводить до руйнування волокон при розтягу композита вздовж осі X:

$$\sigma_{f_x} = 1087,2 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Максимальне локальне напруження для матриці (рис.3.1):

$$S_{eqv_max}^m = 0,111093 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Коефіцієнти допустимого навантаження для матриці:

$$k_m^+ = 739; \quad k_m^- = 1152,2.$$

Граничне напруження, що призводить до руйнування матриці при розтягу і стиску композита вздовж осі X:

$$\sigma_{m_x}^+ = 739 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \sigma_{m_x}^- = 1152,2 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Границя міцності композита при розтягу і стиску:

$$\sigma_x^+ = 739 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \sigma_x^- = 1087,2 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

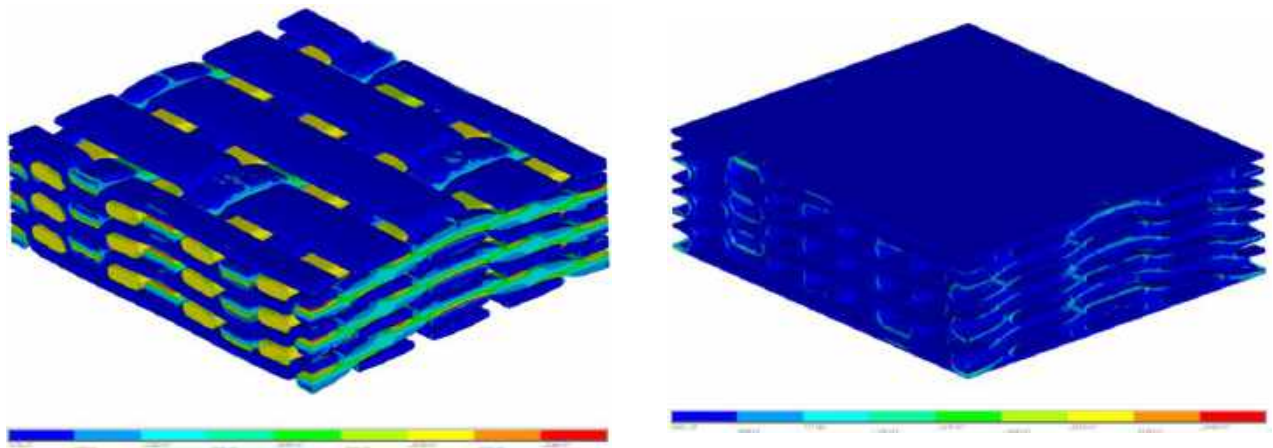


Рисунок 3.1. Розподіл еквівалентних напружень S_{eqv} для волокон і матриці

Результати другого чисельного експерименту з міцності.

Визначено деформації:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = -1,046 \cdot 10^{-6}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 2,072 \cdot 10^{-5}; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = -5,236 \cdot 10^{-6}.$$

Визначено переміщення:

$$u_x|_{x=a} = -0,09414 \cdot 10^{-4} \text{ мм}; \quad u_y|_{y=b} = 2,2792 \cdot 10^{-4} \text{ мм};$$

$$u_z|_{z=c} = -0,16703 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

Максимальне локальне напруження для волокон (рис. 3.2):

$$S_{eqv_max}^f = 4,443 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для волокон:

$$k_f = 1102,9.$$

Границя міцності волокон при розтягу композита вздовж осі Y:

$$\sigma_{f_y} = 1102,9 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Максимальне локальне напруження для матриці (рис. 3.2):

$$S_{eqv_max}^m = 0,149038 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Коефіцієнти допустимого навантаження для матриці:

$$k_m^+ = 540,9; \quad k_m^- = 843,3.$$

Граничне напруження, що призводить до руйнування матриці при розтягу і стиску композита вздовж осі Y:

$$\sigma_{m_y}^+ = 550,9 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \sigma_{m_y}^- = 858,8 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Границя міцності композита при розтягу і стиску:

$$\sigma_y^+ = 550,9 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \sigma_y^- = 858,8 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

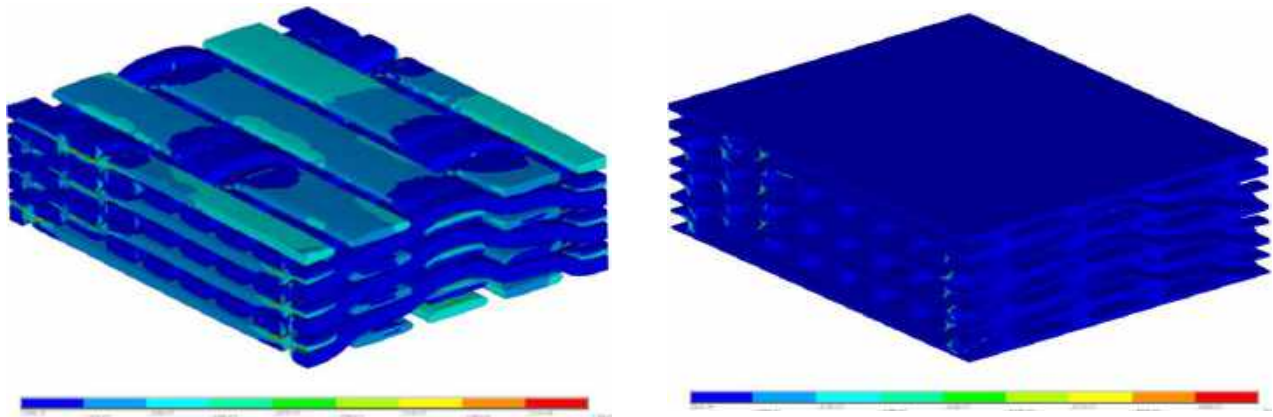


Рисунок 3.2. Розподіл еквівалентних напружень S_{eqv} для волокон і матриці

Результати третього чисельного експерименту з міцності.

Визначено деформації:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = -4,058 \cdot 10^{-6}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = -5,236 \cdot 10^{-6}; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 1,35457 \cdot 10^{-4}.$$

Визначено переміщення:

$$u_x|_{x=a} = -0,36522 \cdot 10^{-4} \text{ мм}; \quad u_y|_{y=b} = -0,57596 \cdot 10^{-3} \text{ мм};$$

$$u_z|_{z=c} = 0,43211 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Максимальне локальне напруження для волокон (рис. 3.3):

$$S_{eqv_max}^f = 9,483 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для волокон:

$$k_f = 516,7.$$

Границя міцності волокон при розтягу композита вздовж осі Z:

$$\sigma_{f_z} = 516,7 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Максимальне локальне напруження для матриці (рис. 3.3):

$$S_{eqv_max}^m = 0,59333 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Коефіцієнти допустимого навантаження для матриці:

$$k_m^+ = 138,4; \quad k_m^- = 215,7.$$

Граничне напруження, що призводить до руйнування матриці при розтягу і стиску композита вздовж осі Z:

$$\sigma_{m_z}^+ = 138,4 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \sigma_{m_z}^- = 215,7 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Границя міцності композита при розтягу і стиску:

$$\sigma_z^+ = 138,4 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \sigma_z^- = 215,7 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

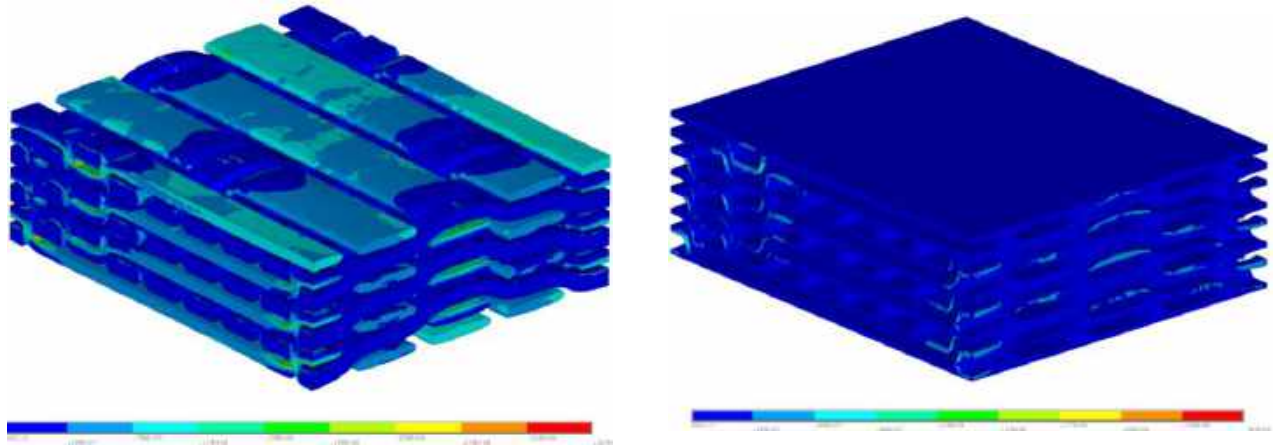


Рисунок 3.3. Розподіл еквівалентних напружень S_{eqv} для волокон та матриці

Результати четвертого чисельного експерименту з міцності.

Максимальне локальне напруження для волокон (рис. 3.4):

$$S_{eqv_max}^f = 26,874 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для волокон:

$$k_f = 182.$$

Границя міцності волокон при зсуві композита в площині XY:

$$\tau_{f_xy} = 674 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Максимальне локальне напруження для матриці (рис. 3.4):

$$S_{eqv_max}^m = 3,60196 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для матриці:

$$k_m^+ = 22,8.$$

Границя міцності матриці при зсуві композита в площині XY:

$$\tau_{m_xy} = 84,4 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Границя міцності при зсуві композита в площині XY:

$$\tau_{xy} = 84,4 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

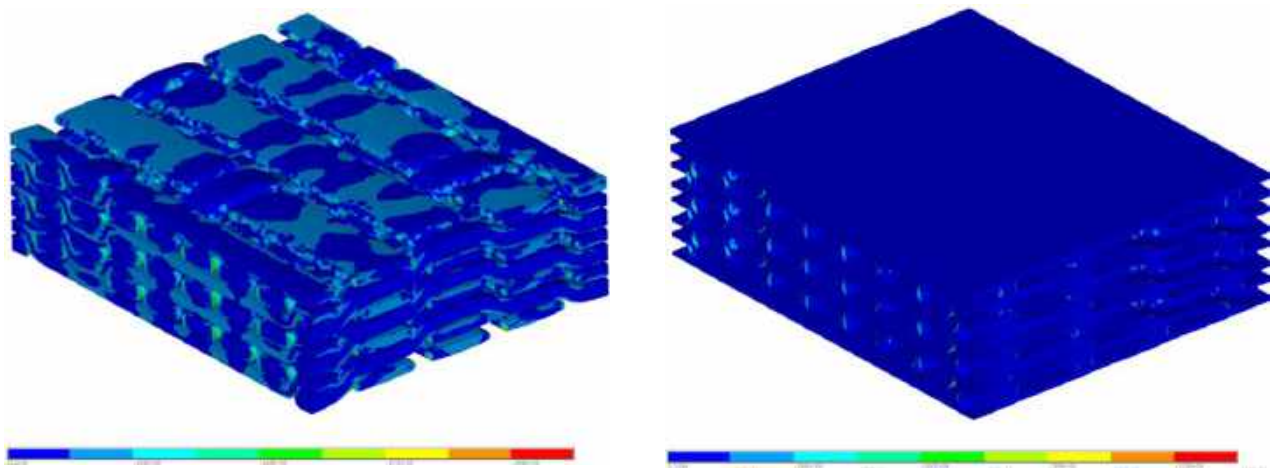


Рисунок 3.4. Розподіл еквівалентних напружень S_{eqv} для волокон і матриці

Результати п'ятого чисельного експерименту з міцності.

Максимальне локальне напруження для волокон (рис. 3.5):

$$S_{eqv_max}^f = 21,186 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для волокон:

$$k_f = 231,3.$$

Границя міцності волокон при зсуві композита в площині YZ:

$$\tau_{f_yz} = 315,5 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Максимальне локальне напруження для матриці (рис. 3.5):

$$S_{eqv_max}^m = 2,815615 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для матриці:

$$k_m^+ = 29,2.$$

Границя міцності матриці при зсуві композита в площині YZ:

$$\tau_{m_yz} = 39,8 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Границя міцності при зсуві композита в площині YZ:

$$\tau_{yz} = 39,8 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

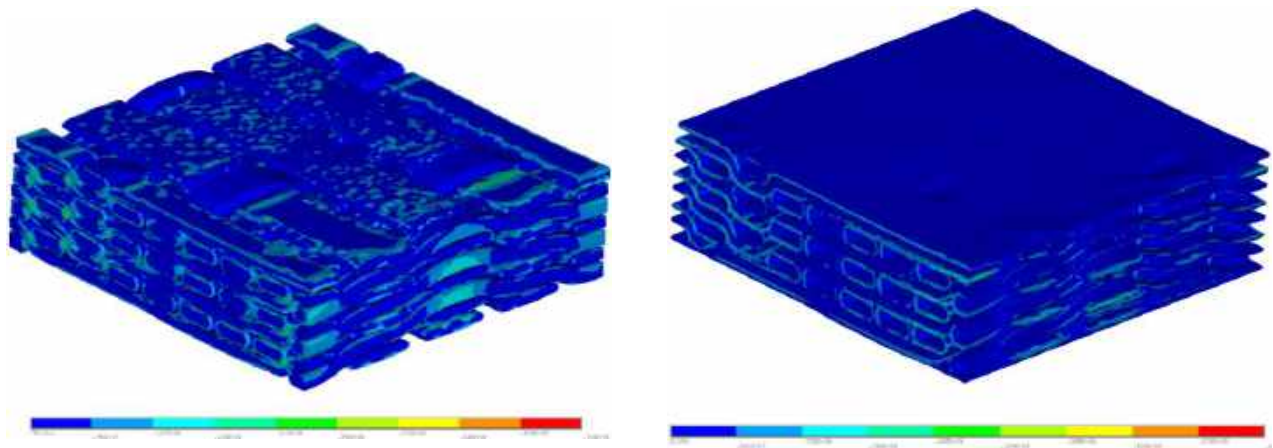


Рисунок 3.5. Розподіл еквівалентних напружень S_{eqv} для волокон і матриці

Результати шостого чисельного експерименту з міцності.

Максимальне локальне напруження для волокон (рис. 3.6):

$$S_{eqv_max}^f = 20,392 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для волокон:

$$k_f = 240,3.$$

Границя міцності волокон при зсуві композита в площині XZ:

$$\tau_{f_xz} = 351,3 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Максимальне локальне напруження для матриці (рис. 3.6):

$$S_{eqv_max}^m = 3,35526 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Коефіцієнт допустимого навантаження для матриці:

$$k_m^+ = 24,5.$$

Границя міцності матриці при зсуві композита в площині XZ:

$$\tau_{m_xz} = 35,8 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Границя міцності при зсуві композита в площині XZ:

$$\tau_{xz} = 35,8 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

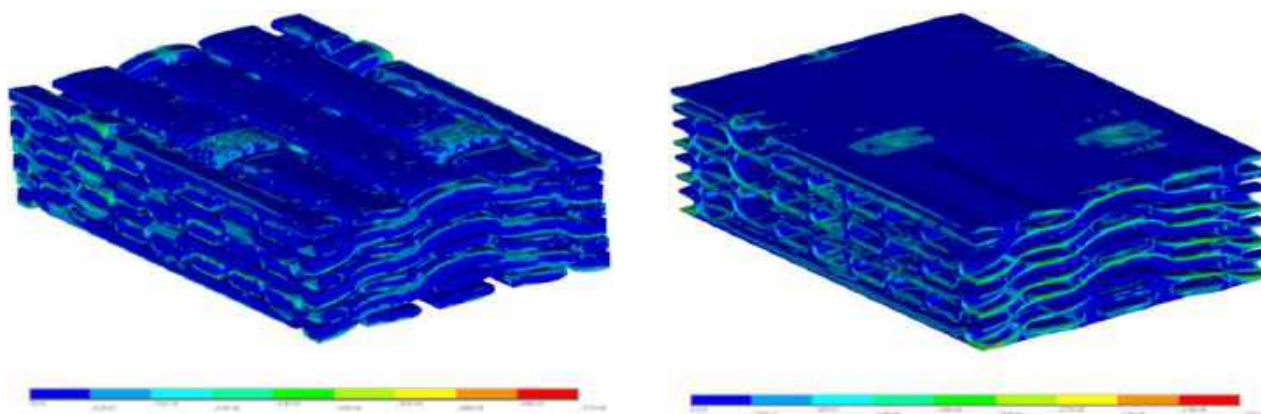


Рисунок 3.6. Розподіл еквівалентних напружень S_{eqv} для волокон і матриці

Розрахункові границі міцності тривимірно армованого КМ наведено в таблиці 3.2. Коефіцієнти квадратичного критерію міцності, визначені за формулами (3.2), (3.5), наведено в таблиці 3.3.

Таблиця 3.2

Границі міцності тривимірно армованого КМ, МПа

σ_x^+	σ_x^-	σ_y^+	σ_y^-	σ_z^+	σ_z^-	τ_{yz}	τ_{xz}	τ_{xy}
739	1087,2	550,9	858,8	138,4	215,7	39,8	35,8	84,4

Таблиця 3.3

Коефіцієнти критерію міцності тривимірно армованого КМ

$F_1, \text{МПа}^{-1}$	$F_2, \text{МПа}^{-1}$	$F_3, \text{МПа}^{-1}$	$F_{11}, \text{МПа}^{-2}$	$F_{22}, \text{МПа}^{-2}$	$F_{33}, \text{МПа}^{-2}$
4,334E-04	6,508E-03	2,589E-03	1,245E-06	2,114E-06	3,35E-05
$F_{44}, \text{МПа}^{-2}$	$F_{55}, \text{МПа}^{-2}$	$F_{66}, \text{МПа}^{-2}$	$F_{12}, \text{МПа}^{-2}$	$F_{23}, \text{МПа}^{-2}$	$F_{13}, \text{МПа}^{-2}$
1,404E-04	6,313E-04	7,803E-04	-8,11E-07	-4,207E-06	-3,228E-06

Загальну схему методу визначення параметрів критерію міцності КМ, який враховує різницю границь міцності при розтягу і стиску представлено на рис. 3.7

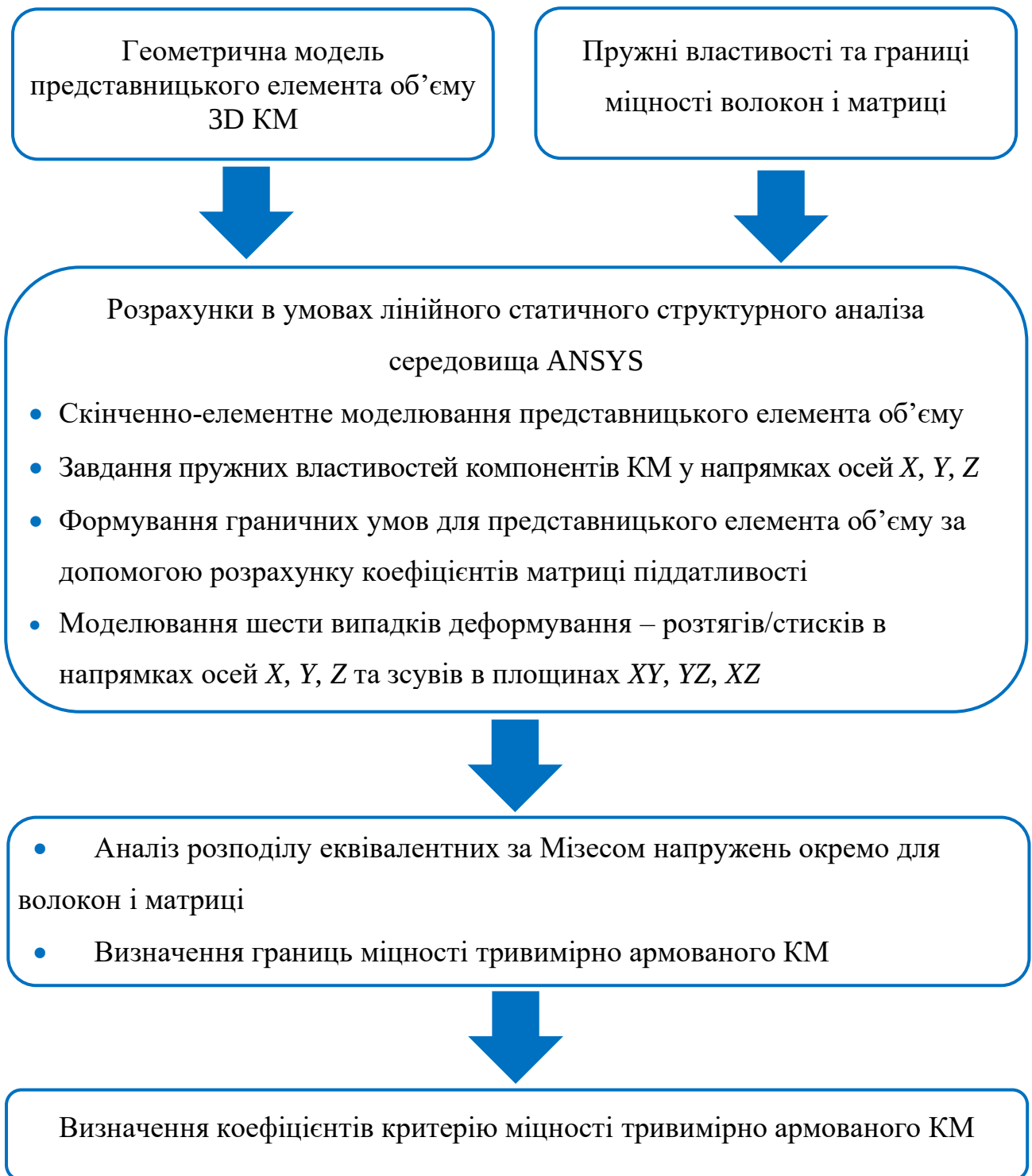


Рисунок 3.7. Схематичне зображення методу визначення параметрів міцності композиційних матеріалів

3.4 Висновки з розділу

За результатами, описаними вище, можна зробити наступні висновки:

1. Створено метод визначення параметрів квадратичного критерію міцності ортотропного тіла, який враховує різницю границь міцності при розтягу і стиску. Розроблена аналітично-чисельна процедура базується на математичному моделюванні представницького елемента об'єму тривимірно армованого КМ. 9 з 12 констант критерію однозначно визначаються за результатами одновісних експериментів на розтяг (стиск) та чистий зсув. Останні 3 константи визначаються такими, що автоматично виконуються умови існування поверхні міцності еліпсоїдного типу.

2. За допомогою проведення серії чисельних експериментів вперше визначено всі границі міцності та коефіцієнти критерію міцності еквівалентного ортотропного матеріалу тривимірно армованого КМ.

3. Запропонований метод після експериментальної верифікації можна використовувати в проектних роботах для дослідження статичної міцності конструкцій з тривимірно армованих КМ.

4. Основні результати цього розділу дисертаційного дослідження опубліковано в роботі [10].

3.5 Література до третього розділу

1. Hill R. A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1948. Vol. 193. P. 281-297. DOI:10.1098/rspa.1948.0045.

2. Mises R. V. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. ZAMM - Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik. 1928. Band 8. P. 161-185. DOI:10.1002/zamm.19280080302. (in German).

3. Tsai S. W., Wu E. M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, 1971. Vol 5. P. 58-80. DOI: 10.1177/002199837100500106.
4. Arruda M. R. T., Almeida-Fernandes L., Castro L., Correia J. R. Tsai–Wu based orthotropic damage model. *Composites Part C: Open Access*. 2021. Vol. 4. 100122. DOI: 10.1016/j.jcomc.2021.100122.
5. Chen X., Sun X., Chen P., Wang B., Gu J., Wang W., Chai Y., Zhao, Y. Rationalized improvement of Tsai–Wu failure criterion considering different failure modes of composite materials. *Composite Structures*. 2021. Vol. 256. Issue 113120. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.113120.
6. Chamis C.C., Abdi F., Garg M., Minnetyan L., Baid H., Huang D., Housner J., Talagani F. Micromechanics-based progressive failure analysis prediction for WWFE-III composite coupon test cases. *Journal of Composite Materials*, 2013. Vol. 47, Is. 20-21: P. 2695-2712. DOI: 10.1177/0021998313499478.
7. Kollar L. P. Springer G. S. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge: *Cambridge University Press*, 2003. 480 p. DOI: 10.1017/CBO9780511547140.
8. Lepikhin P.P., Romashchenko V.A. Strength of Inhomogeneous Anisotropic Hollow Cylinders under Pulse Loading. Naukova Dumka. Kiev. 2014. 232 p. (in Russian).
9. Tsai S.W., Hahn H.T. *Introduction to Composite Materials*. Technomic Publishing Co, 1980. P. 466.
10. Morozov A. V., Lvov G. I. A Procedure for the Numerical Determination of the Strength Criterion Parameters of a Three-Dimensionally Reinforced Composite Material. *Strength Mater.* 2024. Vol. 56. № 1. DOI: 10.1007/s11223-024-00626-8.

РОЗДІЛ 4 ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕТАЛЕЙ З КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Однією із значних проблем, що виникають при розробці та експлуатації перспективних авіаційних газотурбінних двигунів є забезпечення динамічної міцності. Вирішення цієї проблеми прямо впливає на надійність та ресурс двигуна оскільки більшість дефектів пов'язана з дією динамічних напружень від змінних навантажень, що різко зростають в умовах резонансу.

У розділі розглядаються дві роторні деталі, які схожі за силовим навантаженням – широкохордна лопатка вентилятора й лопать повітряного гвинта. Лопатка вентилятора виготовлена методом РТМ. Лопать повітряного гвинта виготовлена методом комбінованого формування.

Зазначені деталі входять до найбільш відповідальних і навантажених деталей двигуна [1], тому потрібно на стадії проектування оцінити та попередити можливість появи резонансних коливань на всіх режимах роботи АГТД.

Вимушені коливання лопатки та лопаті відбуваються під дією змінних за часом газодинамічних сил від газового потоку (аеродинамічного збудження) та мають періодичний характер, оскільки визначаються частотою обертання ротора (механічним збудженням). Лопатка та лопать, як просторові пружні системи з розподіленою масою, мають нескінчену дискретну кількість власних частот і форм коливань. Кожній формі коливань відповідає власна частота, а їх сукупність складає спектр. У теорії розрізняють декілька видів коливань – згинальні, крутильні, пластинкові, поздовжні, змішані. На практиці інтерес виникає до коливань з найбільшими амплітудами у визначеному діапазоні частот. Як відомо, кожна форма коливань і пов'язана з нею власна частота визначені розподілом переміщень з відповідним положенням вузлових ліній і залежать від матеріалу, форми, розмірів деталі та умов її закріплення.

Таким чином аналіз власних частот і форм коливань на проєктному етапі дозволить прогнозувати небезпечні резонансні режими роботи АГТД для прийняття

запобіжних заходів щодо відлаштування деталей від резонансів і визначити їх найбільш напружені локальні зони.

Аналіз власних частот і форм коливань доцільно здійснювати за допомогою чисельного моделювання методом скінченних елементів [2-11].

Методом візуалізації залежності відповідних власних частот коливань лопатки до частот обертання ротора з метою визначення резонансних режимів роботи двигуна, є резонансна діаграма (діаграма Кемпбелла). На сьогодні не існує універсального методу для частотного відлаштування конструкцій з композиційних матеріалів, тому ця проблема є актуальною.

У цьому розділі розрахунок власних частот і форм коливань здійснено методом скінченних елементів за допомогою програмного пакету ANSYS із особливостями, які потрібно враховувати при модальному аналізі деталей із композиційного матеріалу. Розв'язання цієї задачі є актуальним і має важливе практичне значення.

4.1 Динамічні характеристики механічних систем

Вивчення динамічної поведінки просторової пружної механічної системи з розподіленою масою, пов'язано з використанням математичної моделі, яка може бути представлена в символічному вигляді. Ідеалізована математична модель повинна точно описувати геометрію, граничні умови (дію зовнішніх сил), пружні, дисипативні та інерційні властивості механічної системи.

Для формулювання закону руху механічної системи потрібно визначити залежність координат точок або радіус-вектора системи, як функцій від часу:

$$\vec{r}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.1)$$

Математичний опис цих функцій здійснюється за допомогою диференціальних рівнянь за координатами, інтегрування яких дозволяє визначити параметри руху механічної системи.

Для інваріантної форми запису, рівняння руху механічної системи записують в узагальнених координатах q_i . Кількість узагальнених координат дорівнює числу ступенів свободи механічної системи.

Варіаційні принципи, які є основою формалізму Лагранжа, виражають математичні умови, що відрізняють дійсний рух механічної системи серед інших кінематично можливих рухів (за допомогою принципу найменшої дії).

Дія за Гамільтоном, це функціонал

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt = \min, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.2)$$

де L – функція Лагранжа (кінематичний потенціал механічної системи):

$$L = T - U,$$

для якої T – кінетична енергія механічної системи, U – потенційна енергія механічної системи.

Диференціальне рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах виражено рівнянням Лагранжа другого роду [12]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.3)$$

Диференціальне рівняння руху пружного тіла з урахуванням сил інерції в інваріантній формі для вирішення динамічних задач має вигляд [13, 14]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.4)$$

в декартових координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.5)$$

де u, v, w – компоненти вектору переміщень в декартовій системі координат;

$\rho(x, y, z)$ – густина деформованого середовища;

X, Y, Z – складові вектору $\mathbf{F}$ масових сил.

Групу геометричних рівнянь відносної деформації розтягу та зсуву виражають формули Коші

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\}. \quad (4.6)$$

До групи фізичних рівнянь, що встановлюють залежність між компонентами тензорів напружень і деформацій, відносяться формули закону Гука для ізотропного тіла

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\}, \quad (4.7)$$

або в зворотній формі:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}, \quad (4.8)$$

де λ, μ – коефіцієнти Ламе;

$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – відносна об'ємна деформація.

Систему рівнянь 4.5–4.8 потрібно доповнити початковими та граничними умовами, як функціями від часу.

Диференціальне рівняння руху ізотропного пружного тіла з урахуванням сил інерції, що виражене в переміщеннях, можна отримати, якщо підставити 4.8 в 4.5:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.9)$$

Для гармонійних коливань розв'язок рівняння (4.9) має вигляд

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z) \cdot \sin \omega t, \quad (4.10)$$

де ω – власна кутова частота коливань;

$\mathbf{u}(x, y, z)$ – функція власних форм коливань.

У випадку ізотропного тіла повна система рівнянь відносно форм власних коливань зводиться до одного однорідного векторного рівняння

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0. \quad (4.11)$$

При модальному аналізі конструкцій, виготовлених з композиційних матеріалів, пружні сталі C_{ijkl} еквівалентного анізотропного матеріалу можуть бути функціями просторових координат. У таких випадках форми власних коливань задовольняють трьом однорідним рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (4.12)$$

Дана система рівнянь, доповнена граничними умовами, утворює однорідну крайову задачу еліптичного типу. Частоти власних коливань визначаються з умов існування ненульових розв'язків однорідної крайової задачі. Для конструкцій складної форми, у разі неможливості отримання точних рішень, використовуються наближені методи.

Модальний аналіз проводиться для визначення динамічних характеристик системи – власних частот та форм коливань лопатки вентилятора та лопаті повітряного гвинта. Модальний аналіз передбачає, що система є лінійно-пружною, а зовнішні сили та демпфування дорівнюють нулю. Використовуючи для розрахунків метод скінчених елементів, рівняння власних коливань можна зобразити у матричному вигляді:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0, \quad (4.13)$$

де $[M]$, $[K]$ – матриці маси (кінетичної енергії) та жорсткості (потенціальної енергії);

$\{\ddot{q}\}$ – вектор-стовпець прискорень;

$\{q\}$ – вектор-стовпець переміщень.

Розв'язок рівняння (4.13) знайдемо у вигляді

$$\{q\} = \{A\} \sin \omega t, \quad (4.14)$$

де $\{A\}$ – вектор-стовпець амплітуд переміщень вузлів, що є власною формою (модою) коливань на власній частоті, оскільки амплітудні значення вузлових переміщень повністю визначають форму деформованого тіла при коливаннях;

$\omega = 2\pi f$ – власна кутова частота коливань;

f – власна частота коливань.

Якщо підставити рішення (4.14) в рівняння (4.13), отримаємо:

$$\begin{aligned} -\omega^2 [M] \{A\} \sin \omega t + [K] \{A\} \sin \omega t &= 0 \\ (-\omega^2 [M] \{A\} + [K]) \{A\} \sin \omega t &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Власні частоти знаходимо з рівняння

$$([K] - \omega^2 [M]) \{A\} = 0. \quad (4.16)$$

Вектор $\{A\}$ є розв'язком однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.16). Пошук нетривіального розв'язку стає можливим, якщо визначник матриці системи обертається в нуль при деяких значеннях ω , а задача їх знаходження призводить до типової задачі про власні значення.

$$\det [K] - \omega^2 [M] = 0. \quad (4.17)$$

З рівняння (4.17) знаходимо значення власних частот ω , за якими виконуються умови системи (4.16), та знаходимо відповідні власні форми коливань $\{A\}$.

Оскільки визначник системи дорівнює нулю, одне з рівнянь цієї системи є лінійною комбінацією інших. Отже маємо систему $n-1$ рівнянь з n невідомими. Тому одну з компонент вектора $\{A\}$ можна прийняти довільно, а інші – виразити через неї. Таким чином власні форми коливань визначається з точністю до постійного множника. На практиці використовують нормування по відношенню до матриці мас:

$$\{A\}^T [M] \{A\} = E, \quad (4.18)$$

де E – одинична матриця.

Крім того, власні форми коливань ортогональні по відношенню до матриці маси (М–ортогональність) та жорсткості (К–ортогональність).

4.2 Скінченно-елементний підхід до розрахунку динамічних характеристик лопатки вентилятора

Модель широкохордної лопатки вентилятора створено за допомогою програмного пакету NX. Модель створено в прямокутній системі координат, де за вісь обертання лопатки прийнята вісь X , а радіальний напрямок – вісь Y .

Під час чисельного аналізу за допомогою програмного пакету ANSYS середовища APDL використано скінчений елемент SOLID 186. Регулярна скінчено-елементна сітка має 62828 елементів та 302844 вузлів (рис.4.1).

Розрахунки власних частот і форм коливань здійснено за допомогою блочного методу Ланцоша. Граничні умови, що застосовані до лопатки – жорстке обмеження усіх ступенів свободи вузлів на площинах, які контактують з диском.

Розрахунки здійснено з урахуванням статично деформованого стану лопатки вентилятора від відцентрових сил на частотах обертання колеса вентилятора: 0, 25, 50, 75, 100, 108% (4500 об/хв).

Матеріал моделі визначено в попередньому розділі (табл. 2.3) і задано, як лінійно пружній ортотропний матеріал. Значення пружних властивостей матеріалу наведено на рис. 4.2.



Рисунок 4.1. Скінченно-елементна модель лопатки вентилятора

Linear Orthotropic Material Properties for Material Number 1

Choose Poisson's Ratio

T1	
Temperatures	0
EX	6.0701E+10
EY	4.8263E+10
EZ	7.382E+09
PRXY	0.06346
PRYZ	0.24632
PRXZ	0.25269
GXY	3.703E+09
GYZ	1.364E+09
GXZ	1.462E+09

Add Temperature Delete Temperature Graph

Рисунок 4.2. Пружні характеристики матеріалу лопатки вентилятора

Особливістю чисельного моделювання конструкцій з композиційних матеріалів є те, що властивості еквівалентного ортотропного гомогенного матеріалу (визначені за допомогою спеціальної процедури, що описана у попередньому розділі) потрібно задавати відповідно до просторової геометрії конструкцій.

Визначивши спосіб створення геометрії лопатки вентилятора з тривимірно армованого КМ для чисельного аналізу, потрібно змінити орієнтацію систем координат скінченних елементів (осі симетрії ортотропного матеріалу) по відношенню до глобальної системи координат, в якій створена математична модель лопатки вентилятора (рис.4.1). Таким чином, при моделюванні напрямку властивостей матеріалу моделі на пері лопатки, осі Z систем координат скінчених елементів розміщені як нормалі до площин спинки та корита лопатки (рис. 4.3, синій колір), осі X систем координат скінчених елементів співпадають з лініями, що утворюють профіль пера лопатки в хордовому напрямку (рис. 4.3, чорний колір), осі Y систем координат скінчених елементів розміщені в радіальному напрямку.

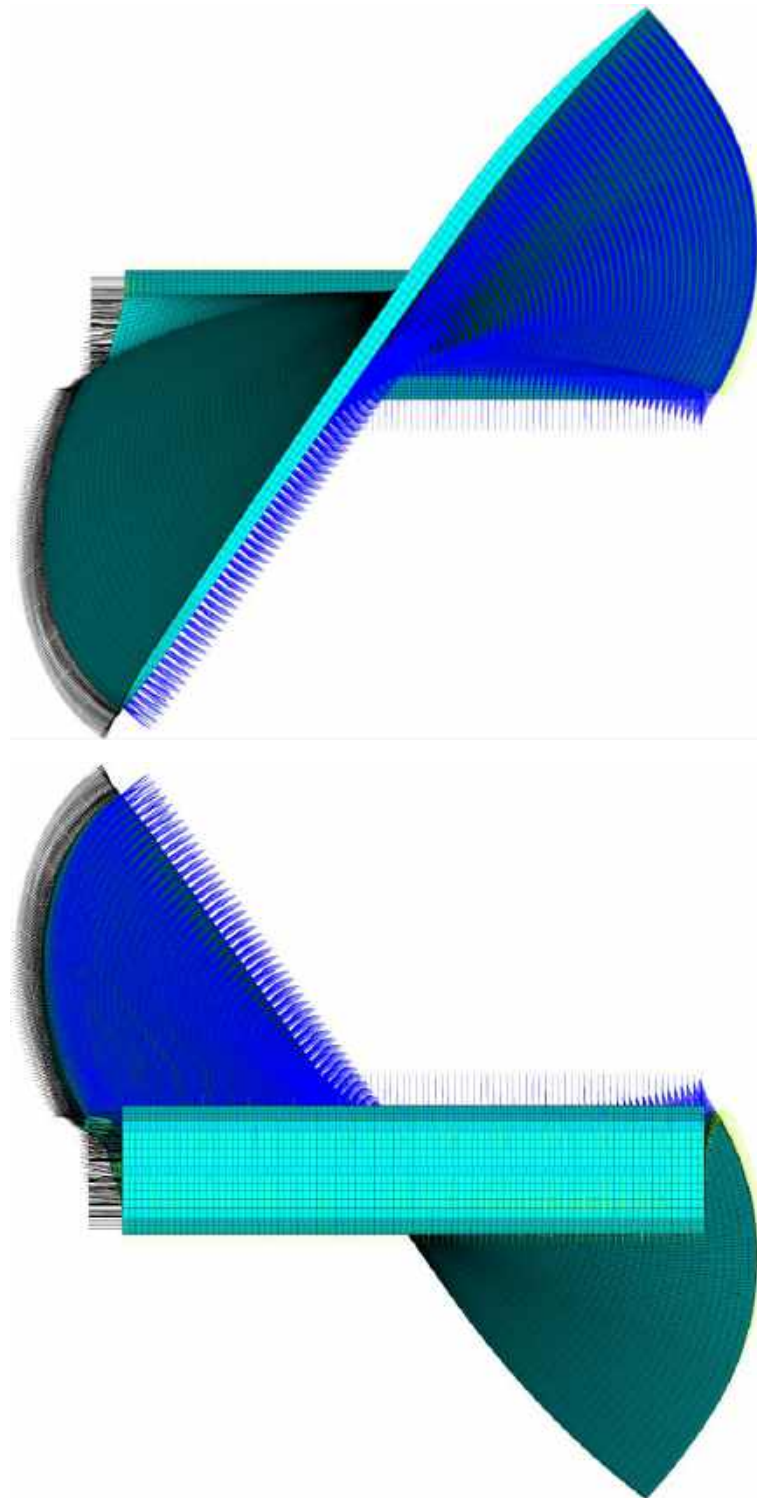


Рисунок 4.3. Системи координат скінчених елементів

Таким чином ортогональні властивості матеріалу повторюють форму лопатки вентилятора та враховуються у розрахунках.

Виконуються дві серії розрахунків:

1. Модальний аналіз лопатки з властивостями композиційного матеріалу (рис. 4.2).

2. Модальний аналіз лопатки зі зміною напрямку осей X і Y систем координат скінченних елементів.

Перша серія розрахунків.

У табл. 4.1 наведено результати, отримані для перших 10 власних частот коливань лопатки.

Таблиця 4.1

Власні частоти коливань лопатки вентилятора (Гц)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
58,98	169,61	243,41	390,78	543,73	624,63	751,15	834,43	978,89	1101

На рисунках 4.4–4.9 приведено результати, отримані для перших 10 власних форм коливань лопатки вентилятора у вигляді норми вектору переміщень (а) та інтенсивності напружень (б).

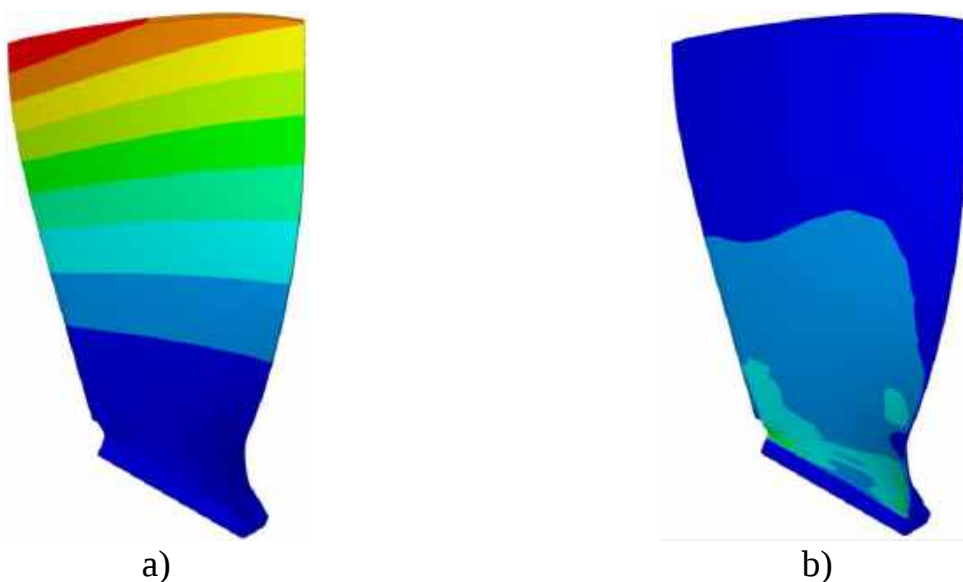


Рисунок 4.4. Результати першої частоти 58.98 Гц

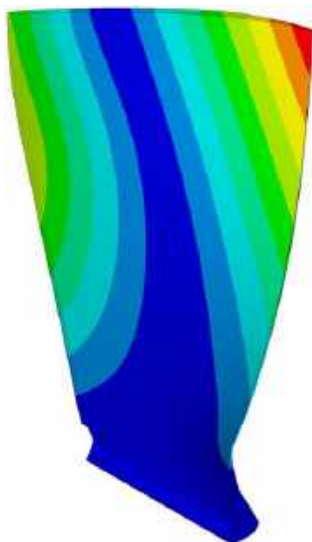


a)

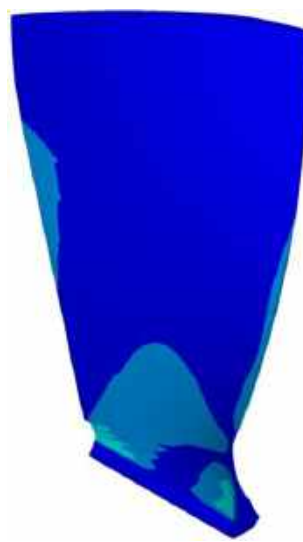


b)

Рисунок 4.5. Результати другої частоти 169.61 Гц



a)

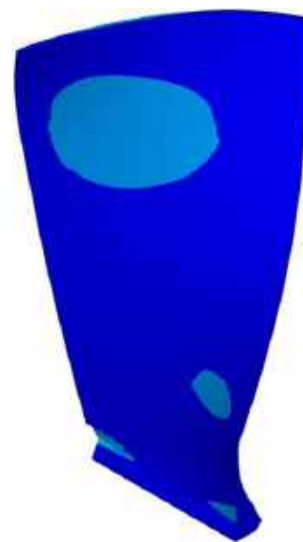


b)

Рисунок 4.6. Результати третьої частоти 243.41 Гц



a)



b)

Рисунок 4.7. Результати четвертої частоти 390.78 Гц



a)

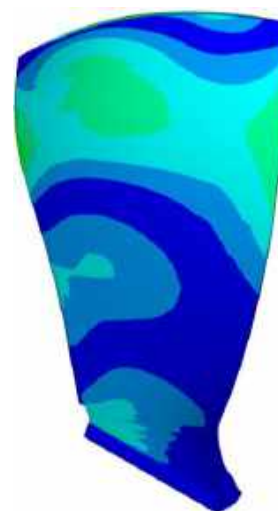


b)

Рисунок 4.8. Результати п'ятої частоти 543.73 Гц



a)

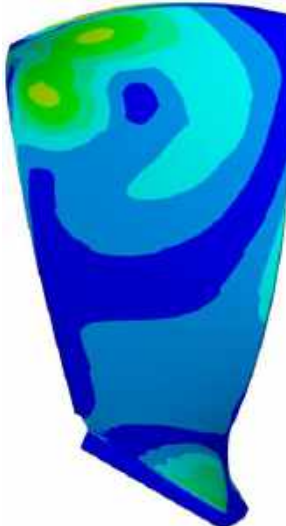


b)

Рисунок 4.9. Результати шостої частоти 624.63 Гц

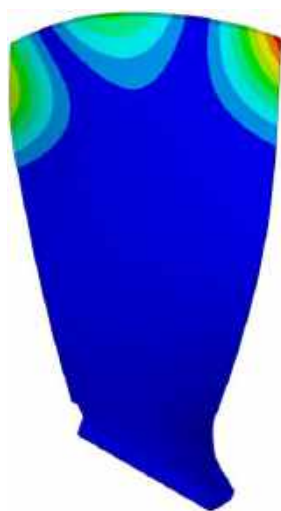


a)

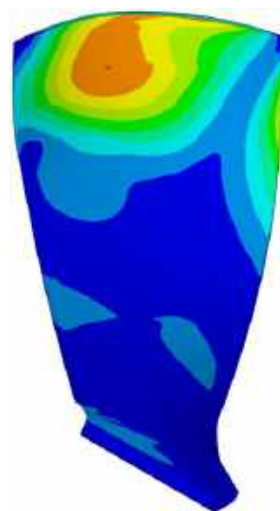


b)

Рисунок 4.10. Результати сьомої частоти 751.15 Гц

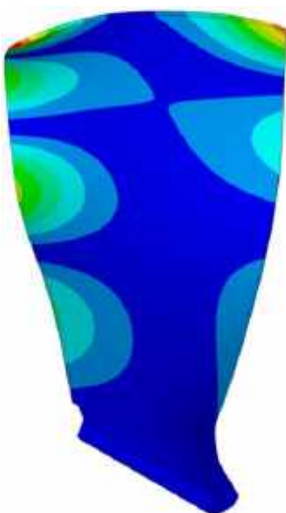


a)

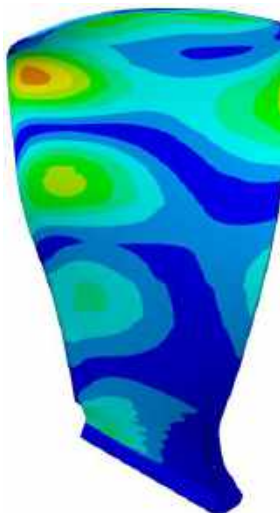


b)

Рисунок 4.11. Результати восьмої частоти 834.43 Гц



a)

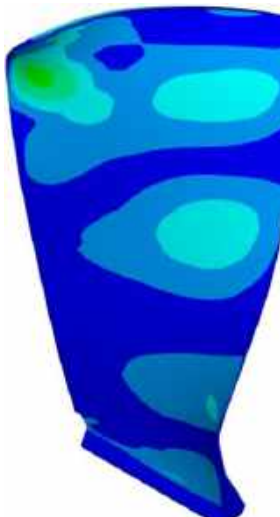


b)

Рисунок 4.12. Результати дев'ятої частоти 978.89 Гц



a)



b)

Рисунок 4.13. Результати десятої частоти 1101 Гц

Залежність значень власних частот коливань лопатки від частот обертання вентилятора для перших п'яти форм наведено на рис. 4.14, де вертикальна червона лінія відповідає обертам колеса вентилятора на максимальному режимі; частоти дії збуджуючих гармонік K наведено у вигляді центральних променів, нахил яких залежить від порядку гармоніки. Точки перетину кривих частот власних коливань і променів збуджуючих гармонік K визначають частоти обертання колеса вентилятора, на яких виникають резонансні коливання за цими гармоніками.

Результати розрахунків п'яти власних частот коливань лопатки вентилятора з урахуванням переднапруженого стану від дії відцентрових сил наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Власні частоти коливань лопатки вентилятора (Гц) на різних частотах обертання вентилятора

%	n, об/хв	1	2	3	4	5
0	0	58,98	169,61	243,41	390,78	543,73
25	1035	61,02	172,74	244,04	393,46	546,1
50	2070	66,64	181,58	246	401,24	553,03
75	3105	74,8	194,72	249,51	413,49	563,95
100	4140	84,53	210,09	255,09	429,38	577,83
108	4500	88,16	215,51	257,7	435,62	583,11

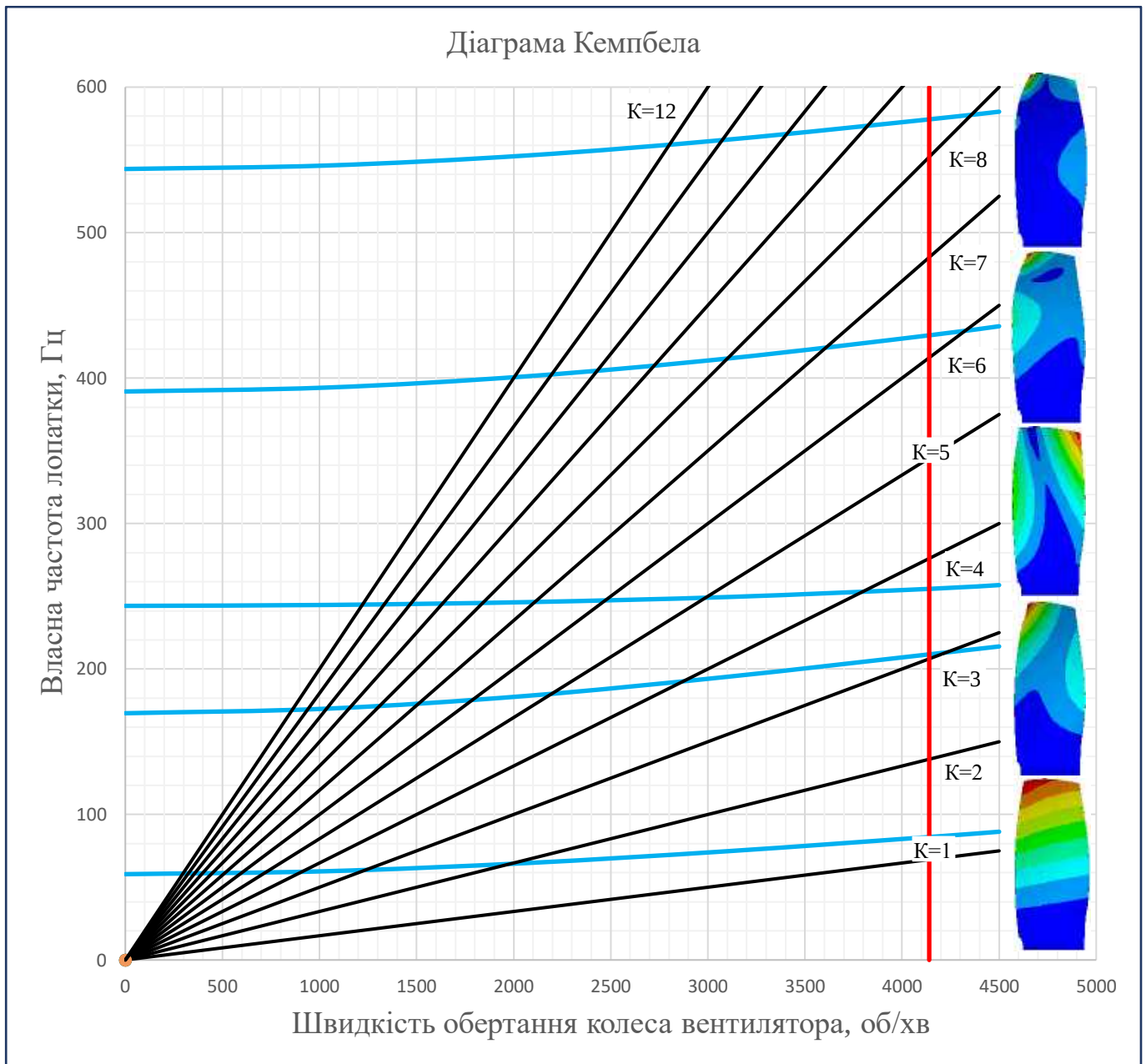


Рисунок 4.14. Резонансна діаграма лопатки вентилятора

Аналіз результатів розрахунків показує, що перша роторна гармоніка та основна (перша згинальна) форма коливань на максимальному режимі не мають перетину, а відносна різниця між ними, розрахована за наступною формулою, становить

$$\Delta_{1p/1l} = \left| \frac{f_{1p}^2 - f_{1l}^2}{f_{1p}^2 + f_{1l}^2} \right| \cdot 100\% = 20\% \quad (4.19)$$

де f_{1p} — частота першої роторної гармоніки двигуна, Гц;

f_{1l} — частота першої форми коливань лопатки, Гц.

Відносна різниця зближення власних частот другої та третьої форми коливань на максимальному режимі розрахована за наступною формулою, становить

$$\Delta_{2л/3л} = \left| \frac{f_{2л}^2 - f_{3л}^2}{f_{2л}^2 + f_{3л}^2} \right| \cdot 100\% = 19\%, \quad (4.20)$$

де $f_{2л}$ – частота другої форми коливань, Гц;

$f_{3л}$ – частота третьої форми коливань, Гц.

На етапі проектування стійкість лопатки вентилятора до автоколивань оцінюється згідно найбільш поширеному критерію – числу Струхалю (зведена частота) – за формулою [15]

$$Sh = \frac{\omega \cdot b}{W}, \quad (4.21)$$

де ω – власна кутова частота коливань;

b – довжина хорди лопатки;

W – швидкість газового потоку.

Число Струхалю – безрозмірна величина, один з критеріїв подібності нестационарних течій рідин та газів, фізичний зміст якого полягає в тому, що від є відношенням нестационарної складової сили, що викликана коливаннями лопатки та діє на її профіль, до сили стаціонарного навантаження, яке визначається швидкісним натиском (тобто характеризує усталеність процесів за часом).

Граничні значення зведених частот дійсні, якщо виконується умова

$$\frac{f_{KP}^1}{f_{3Г}^2} \leq 0,85, \quad (4.22)$$

де f_{KP}^1 – частота першої крутильної форми коливань, Гц;

$f_{3Г}^2$ – частота другої згинальної форми коливань, Гц.

Параметр згинального флатера:

$$\lambda_{3Г} = \frac{2\pi \cdot f_{3Г}^1 \cdot b_{0.9}}{W_{0.9}} \geq 0,25, \quad (4.23)$$

де $f_{3Г}^1$ – частота першої згинальної форми коливань, Гц;

$b_{0.9}$ – довжина хорди на 0,9 висоти пера лопатки, м;

$W_{0.9}$ – швидкість газового потоку на 0.9 висоти пера лопатки на максимальному режимі, м/с.

Параметр крутильного флатера:

$$\lambda_{KP} = \frac{2\pi \cdot f_{KP}^1 \cdot b_{0.9}}{W_{0.9}} \geq 1,05. \quad (4.24)$$

Розраховані значення становлять:

$$\frac{f_{KP}^1}{f_{3I}^2} = 0,59; \lambda_{3I} = 0,44; \lambda_{KP} = 1,32. \quad (4.25)$$

Аналіз результатів, отриманих на етапі проєктування, вказує на відсутність автоколивань лопатки вентилятора.

Друга серія розрахунків.

При моделюванні потрібно змінити напрямок осей системи координат скінченних елементів, або задати характеристики матеріалу, змінивши напрямки X і Y . Значення пружних сталей наведено на рис. 4.15.

Linear Orthotropic Material Properties for Material Number 1	
Choose Poisson's Ratio	
T1	
Temperatures	0
EX	4.8263E+10
EY	6.0701E+10
EZ	7.382E+09
PRXY	0.06346
PRYZ	0.25269
PRXZ	0.24632
GXY	3.703E+09
GYZ	1.364E+09
GXZ	1.462E+09

Buttons: Add Temperature, Delete Temperature, Graph

Рисунок 4.15. Пружні характеристики матеріалу лопатки вентилятора

Результати розрахунків п'яти власних частот коливань лопатки вентилятора з урахуванням переднапруженого стану від дії відцентрових сил наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Власні частоти коливань лопатки вентилятора (Гц) на різних частотах обертання вентилятора

%	п, об/хв	1	2	3	4	5
0	0	64,28	184,64	253,7	416,72	568,86
25	1035	66,13	187,46	254,27	419,06	570,7
50	2070	71,31	195,49	256,05	425,93	576,05
75	3105	78,95	207,61	259,23	436,82	584,35
100	4140	88,23	222,08	264,26	451,11	594,74
108	4500	91,73	227,27	266,62	456,76	598,65

Резонансну діаграму лопатки вентилятора наведено на рис. 4.16.

Аналіз результатів розрахунків показує, що перша роторна гармоніка та основна (перша згинальна) форма коливань на максимальному режимі не мають перетину, а відносна різниця між ними, розрахована за формулою (4.1), становить

$$\Delta_{1p/1л} = 24,1\% . \quad (4.26)$$

Відносна різниця зближення власних частот другої та третьої форми коливань на максимальному режимі становить

$$\Delta_{2л/3л} = \left| \frac{f_{2л}^2 - f_{3л}^2}{f_{2л}^2 + f_{3л}^2} \right| \cdot 100\% = 17,2\% . \quad (4.27)$$

Розраховані за формулами (4.22), (4.23), (4.24) значення становлять

$$\frac{f_{KP}^1}{f_{3Г}^2} = 0,59; \quad \lambda_{3Г} = 0,46; \quad \lambda_{KP} = 1,37. \quad (4.28)$$

Аналіз результатів, отриманих на етапі проєктування, вказує на відсутність автоколивань лопатки вентилятора.

Залежність значень власних частот коливань лопатки від частот обертання вентилятора для перших п'яти форм наведено на рис. 4.16.

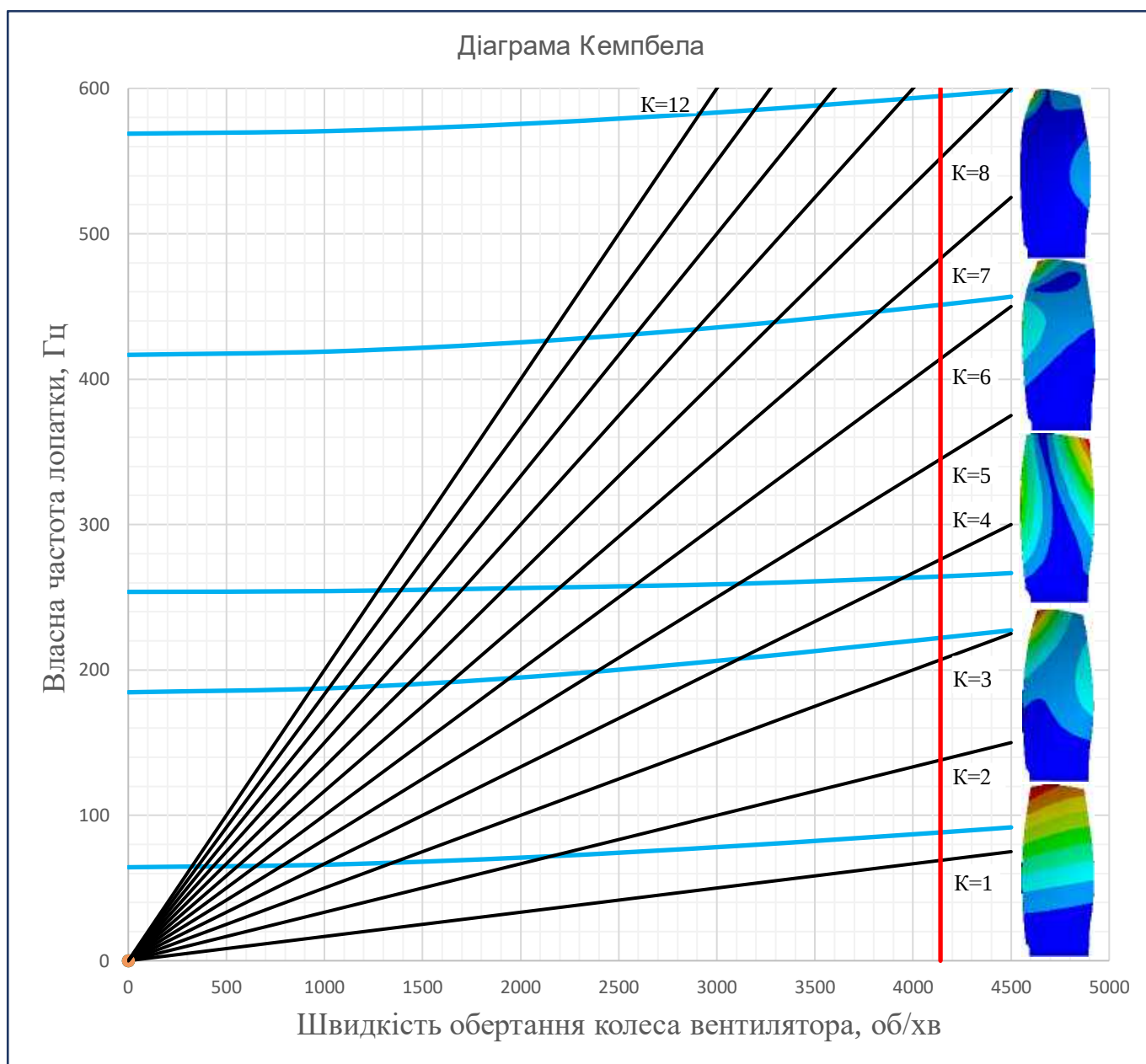


Рисунок 4.16. Резонансна діаграма лопатки вентилятора

На рисунках 4.17–4.21 наведено результати зміни норми вектора переміщень перших п'яти власних форм коливань лопатки вентилятора від дії відцентрових сил. Наведено форми коливань на 0 (а) та 100% (б) частоти обертання вентилятора.

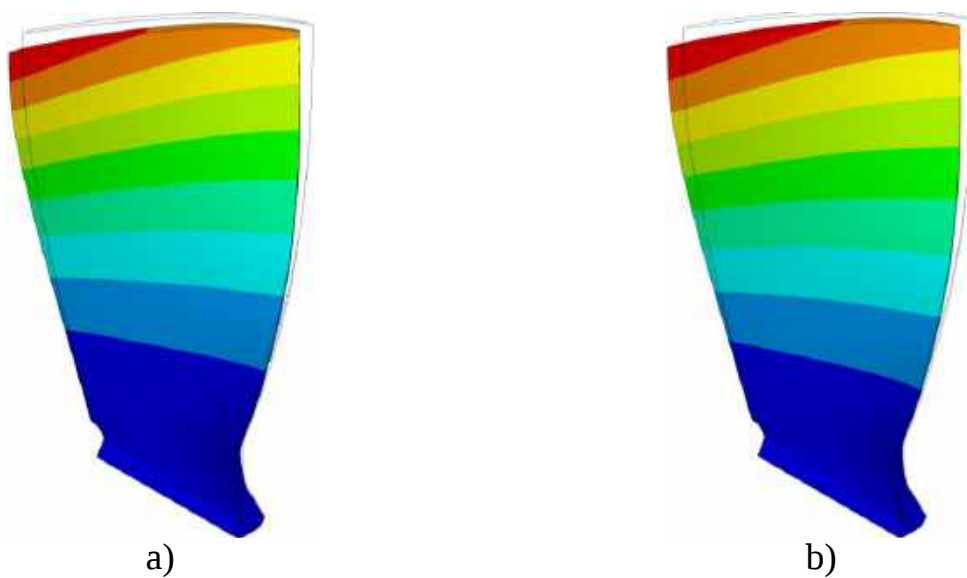


Рисунок 4.17. Перша форма коливань

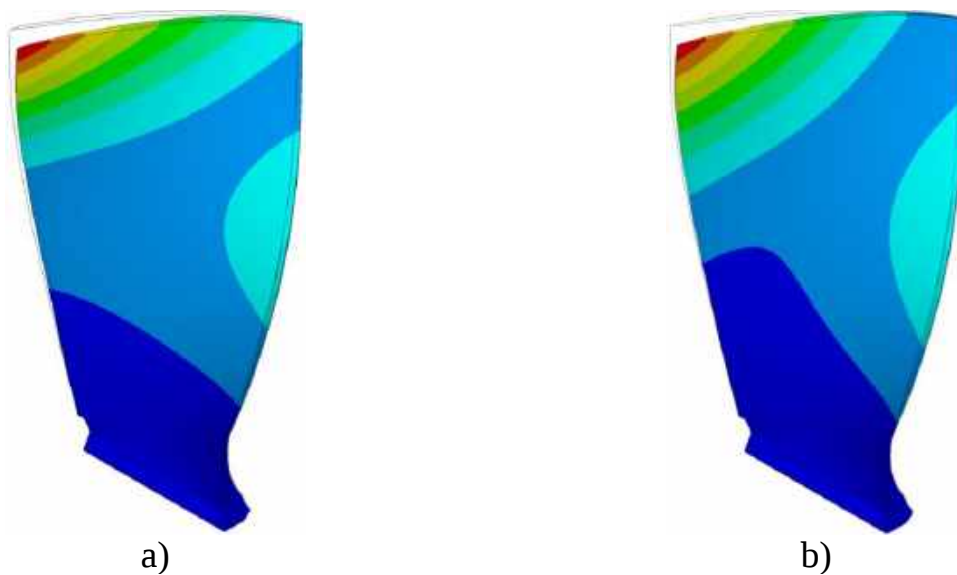


Рисунок 4.18. Друга форма коливань

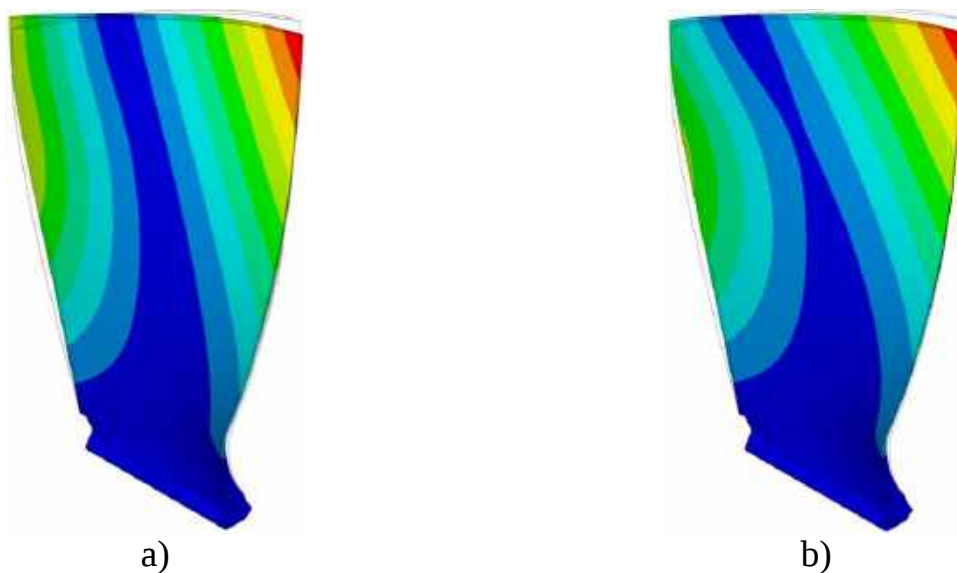


Рисунок 4.19. Третя форма коливань

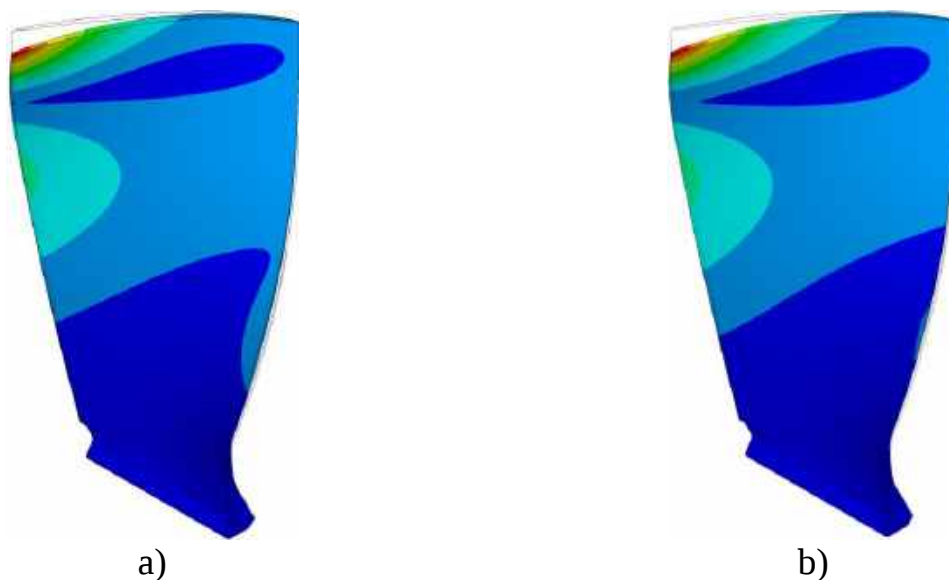


Рисунок 4.20. Четверта форма коливань

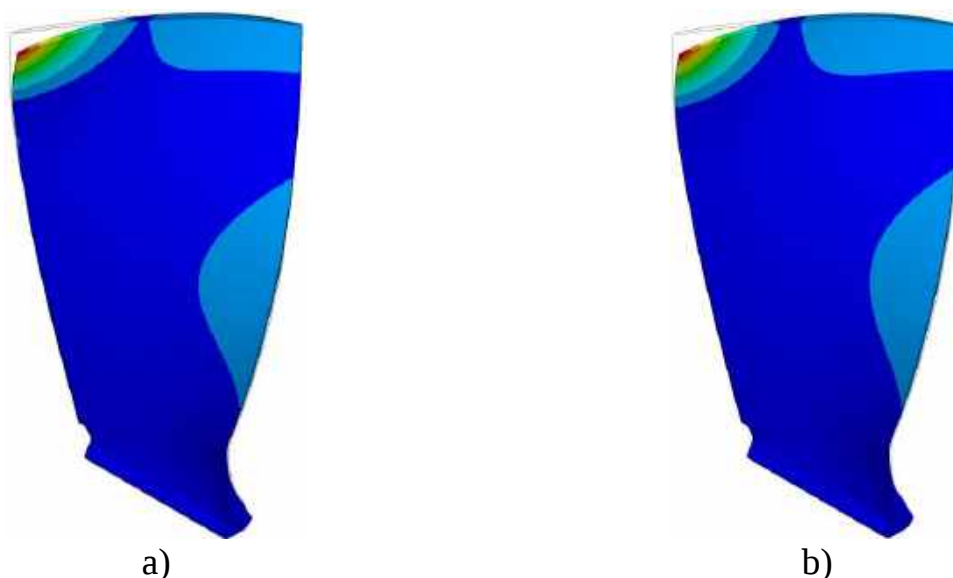


Рисунок 4.21. П'ята форма коливань

Порівнявши власні частоти та форми коливань лопатки вентилятора, визначені в першій та другій серіях розрахунків, можна визначити збільшення власних частот коливань, у другій серії. Відносна різниця між власними частотами лопатки вентилятора, визначеними в першій та другій серіях розрахунків представлено в табл. 4.4.

Збільшення частоти обертання колеса вентилятора збільшує жорсткість лопатки вентилятора, що призводить до збільшення власних частот коливань. Власні частоти коливань мають нелінійну залежність від частоти обертання колеса

вентилятора. Згинальна жорсткість більше залежить від частоти обертання колеса вентилятора, ніж крутильна жорсткість лопатки вентилятора.

Таблиця 4.4

Власні частоти коливань лопатки вентилятора, отримані в двох серіях розрахунків та їх різниця (Гц)

%	n, об/хв	1	2	3	4	5
Перша серія розрахунків						
0	0	58,98	169,61	243,41	390,78	543,73
100	4140	84,53	210,09	255,09	429,38	577,83
Друга серія розрахунків						
0	0	64,28	184,64	253,7	416,72	568,86
100	4140	88,23	222,08	264,26	451,11	594,74
Різниця						
0	0	5,3	15,03	10,29	25,94	25,13
100	4140	3,7	11,99	9,17	21,73	16,91

4.3 Чисельне визначення динамічних характеристик лопаті повітряного гвинта

Модель лопаті ПГ створено за допомогою програмного пакету SOLIDWORKS в прямокутній системі координат, де за вісь обертання лопаті прийнята вісь X, а за радіальний напрямок – вісь Z (рис. 4.22). Модель лопаті конструктивно складається з компонентів з різними властивостями матеріалів. Так компонентами з ортотропними властивостями матеріалу є обшивка, лонжерон, ровінг. Компонентами з ізотропними властивостями матеріалу є вкладиш, накладки. Ефективні пружні характеристики композиційних матеріалів компонентів лопаті повітряного гвинта одержані аналітичним та розрахунковим методами.

Моделювання здійснено в середовищі Workbench програмного пакету ANSYS. Скінченно-елементна сітка має 529301 елементів та 959365 вузлів.

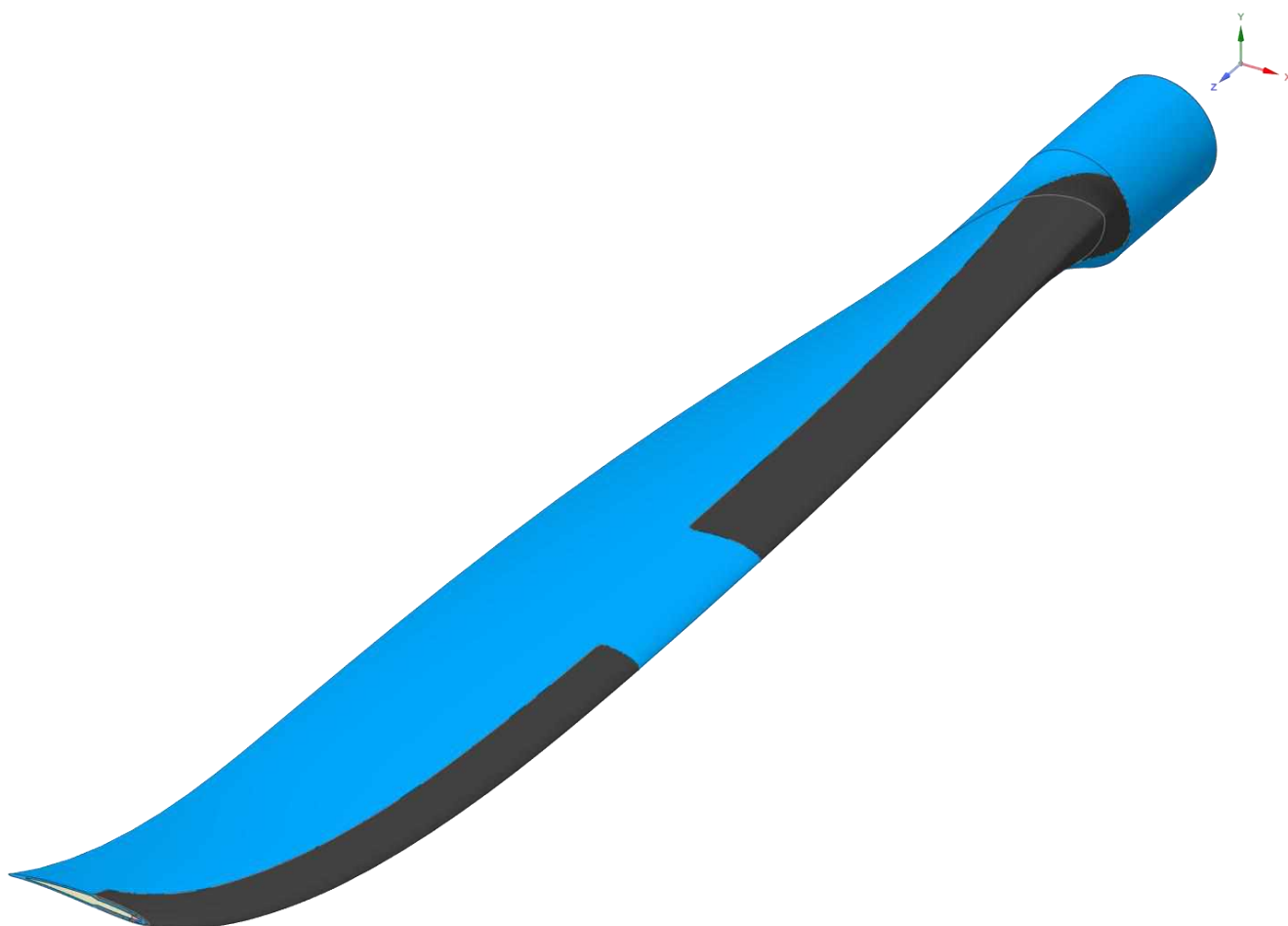


Рисунок 4.22. Модель лопаті повітряного гвинта

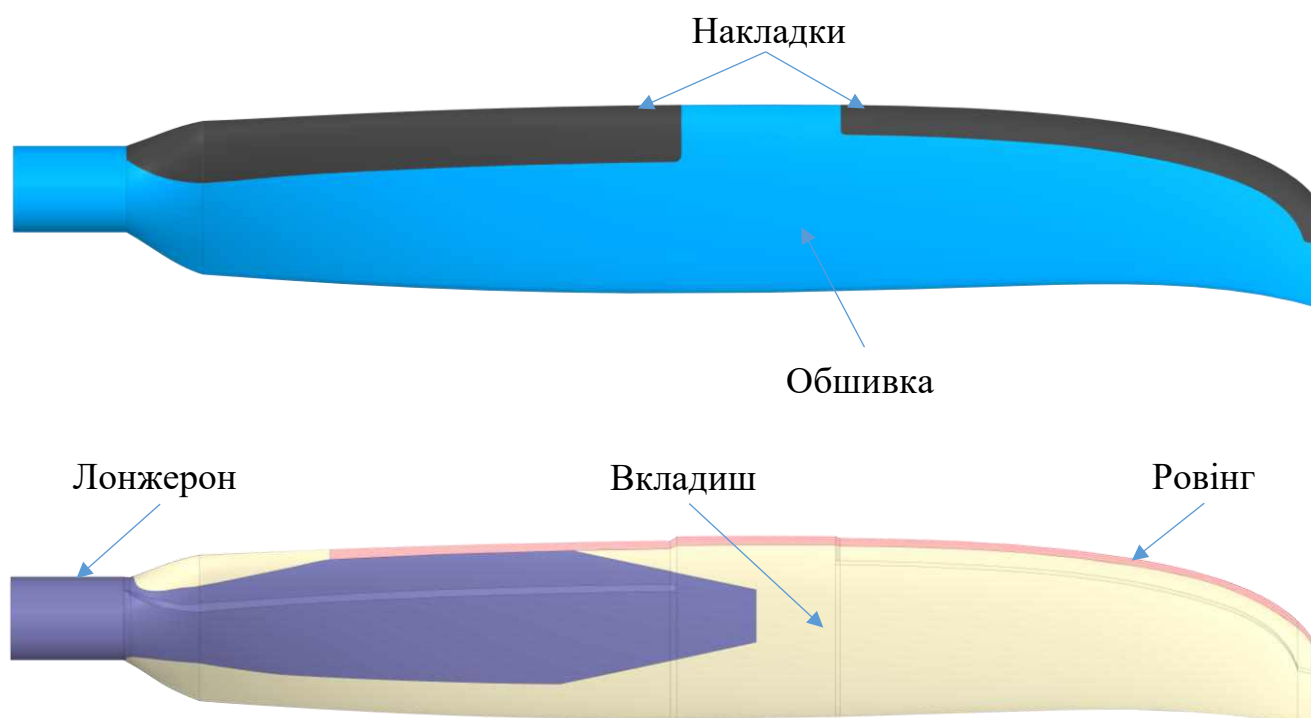


Рисунок 4.23. Компоненти розрахункової моделі лопаті

Для чисельного аналізу в компонентах лопаті з ортотропними властивостями композиційного матеріалу потрібно задати орієнтацію систем координат скінченних елементів, відмінну від глобальної системи координат, у якій створена модель лопаті повітряного гвинта (рис. 4.22). При моделюванні напрямку властивостей матеріалу компонентів обшивки, лонжерона, ровінга, осі Z систем координат скінченних елементів розміщені як нормалі до формоутворюючих поверхонь лопаті (рис. 4.24, синій колір), осі Y систем координат скінчених елементів співпадають з лініями, що утворюють профіль пера лопаті в перерізах площин XU (рис. 4.24, зелений колір), осі X систем координат скінчених елементів розміщені в радіальному напрямку (рис. 4.24, червоний колір).

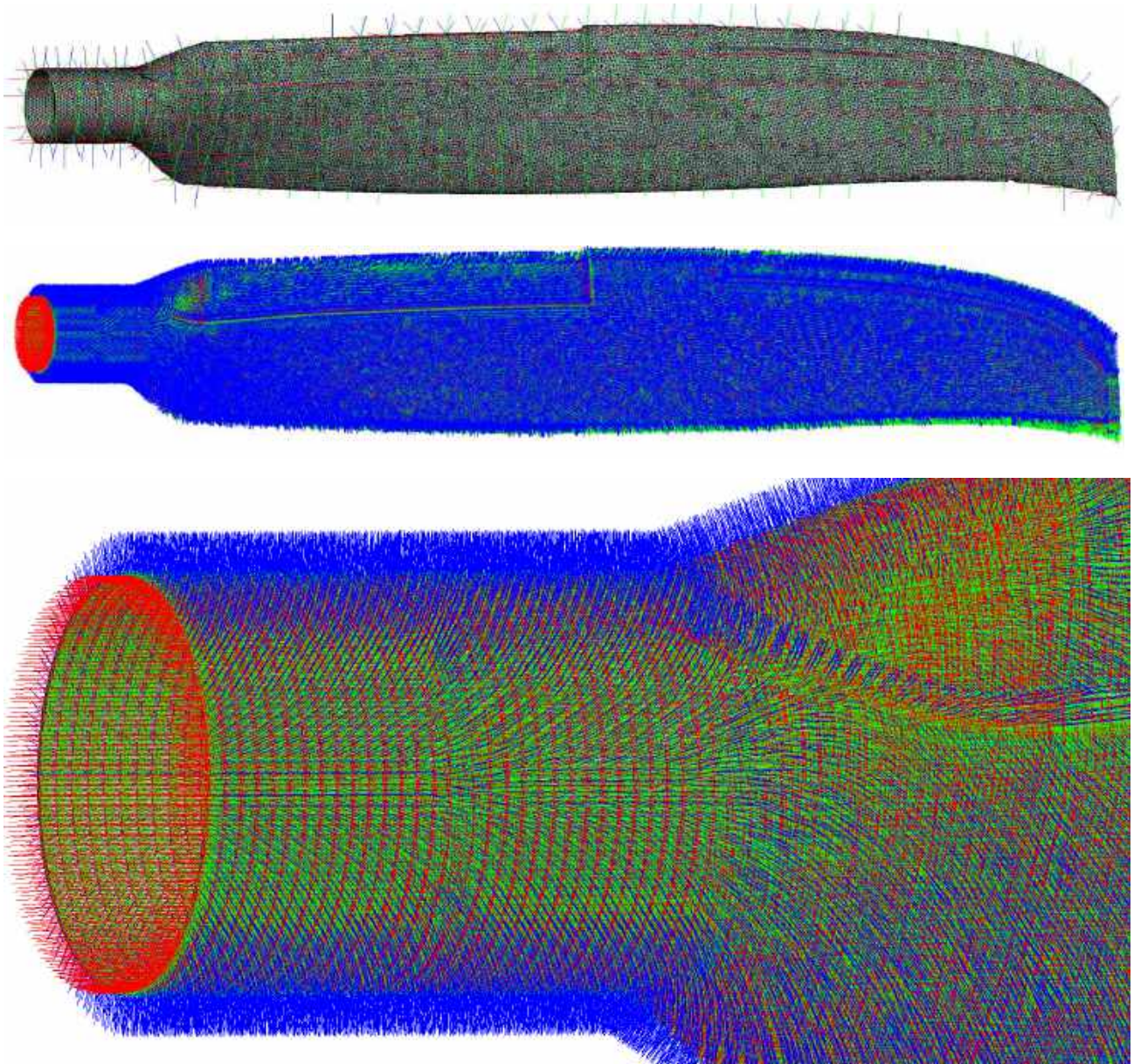


Рисунок 4.24. Системи координат скінчених елементів обшивки

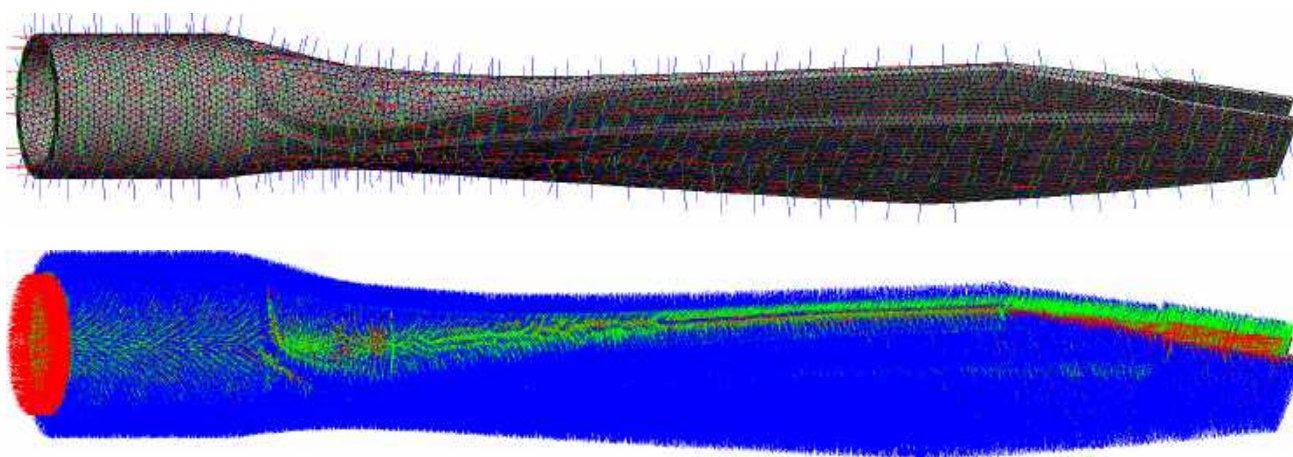


Рисунок 4.25. Системи координат скінчених елементів лонжерона

На рисунках 4.26...4.30 приведено результати перших п'яти власних частот коливань лопаті повітряного гвинта у вигляді норми вектору переміщень лопаті зі сторони спинки а) і корита е); інтенсивності напружень лопаті зі сторони спинки б) і корита ф); інтенсивності напружень обшивки зі сторони спинки с) і корита г); інтенсивності напружень лонжерону зі сторони спинки д) і корита h).

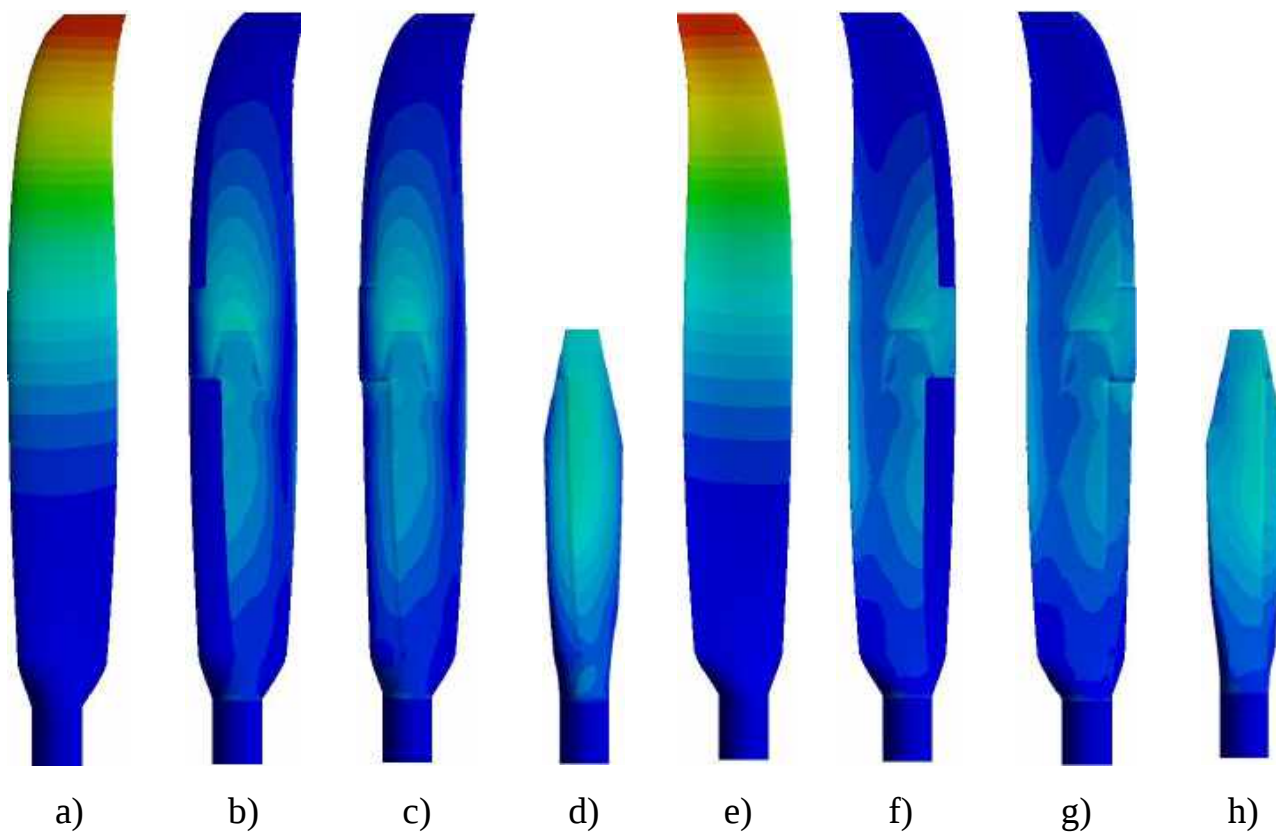


Рисунок 4.26. Результати першої частоти 26,1 Гц

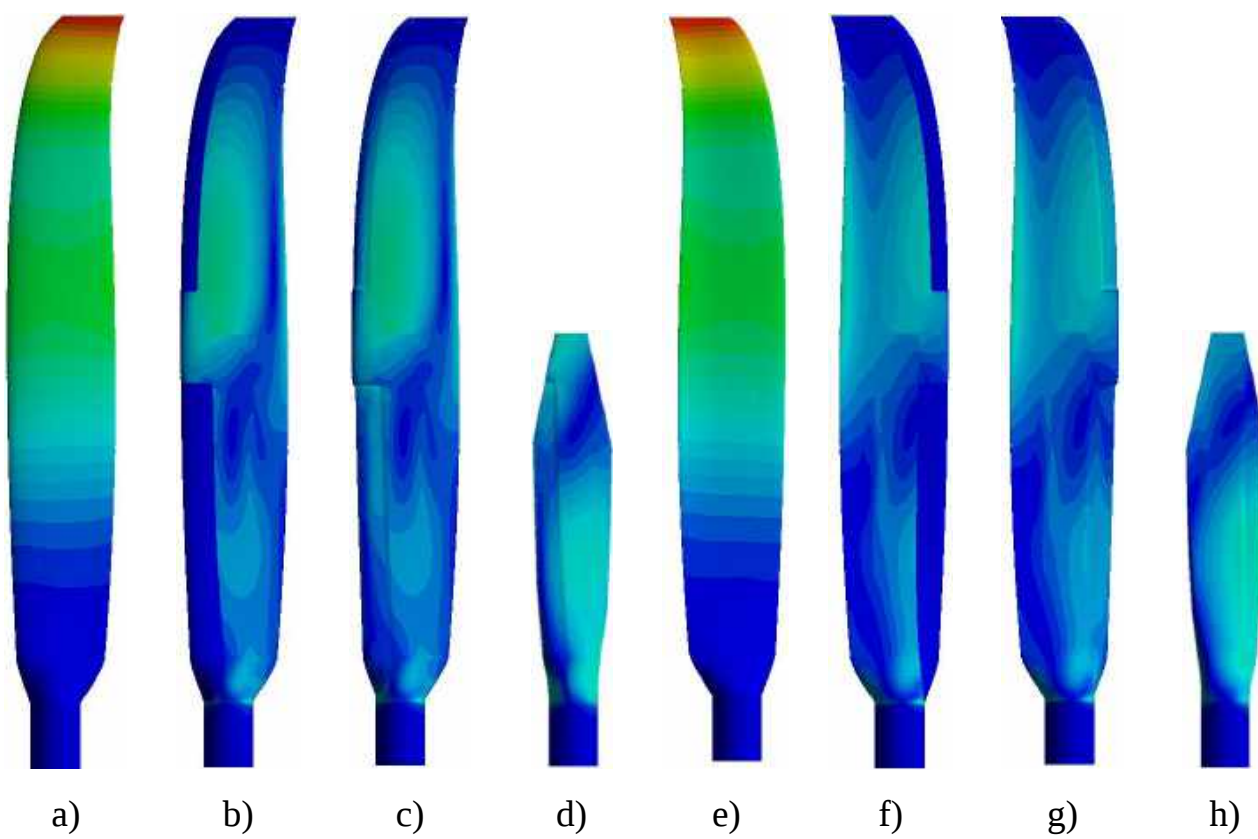


Рисунок 4.27. Результати другої частоти 83,4 Гц

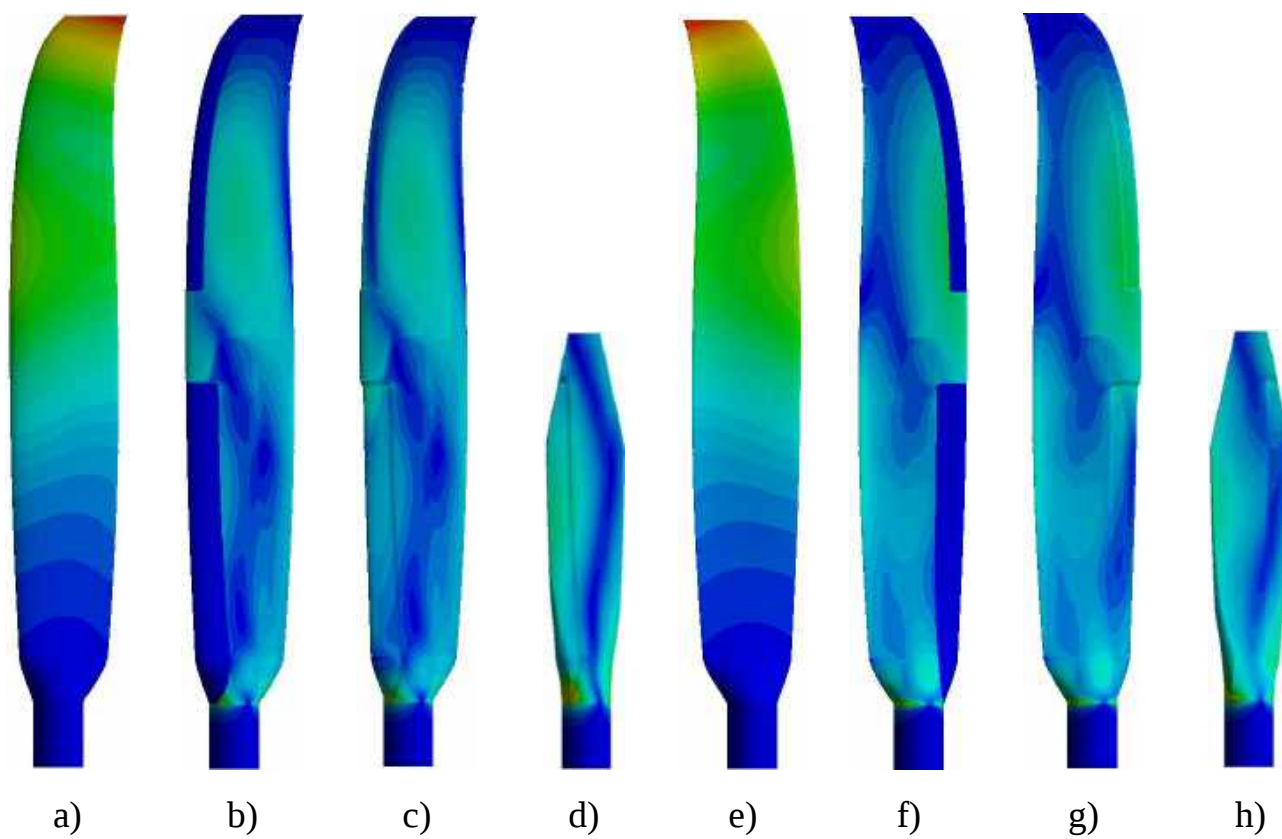


Рисунок 4.28. Результати третьої частоти 123,5 Гц

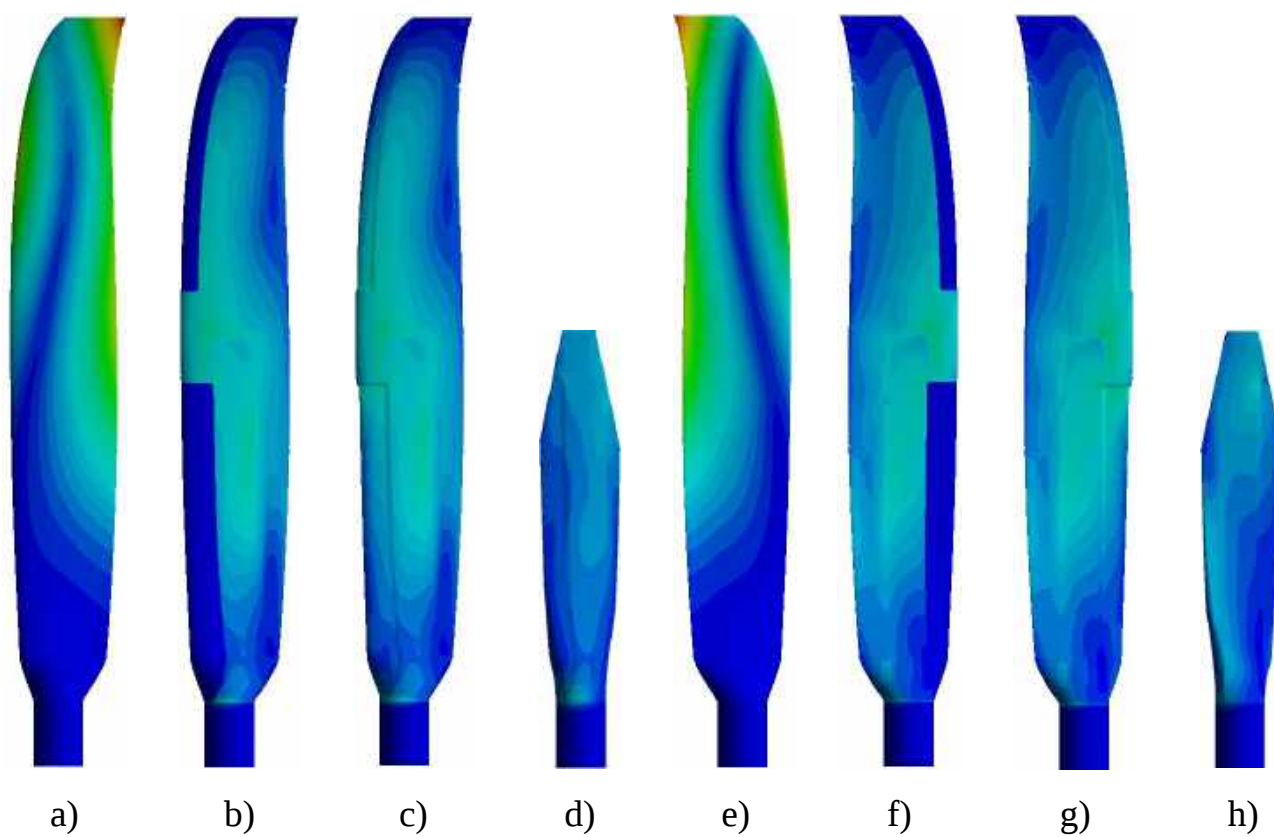


Рисунок 4.29. Результати четвертої частоти 205,9 Гц

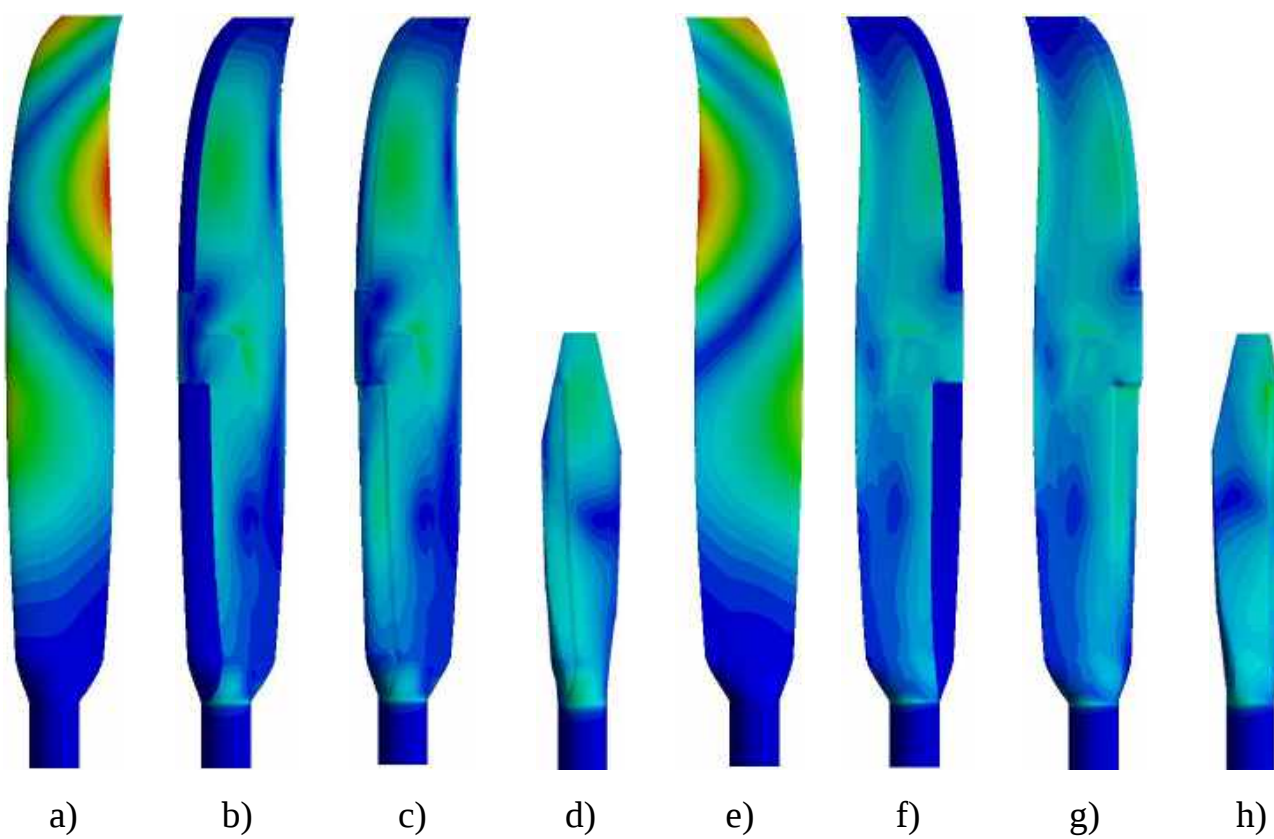


Рисунок 4.30. Результати п'ятої частоти 242,7 Гц

4.4 Висновки з розділу

За результатами, описаними вище, можна зробити наступні висновки:

1. Розроблено підхід до чисельного визначення динамічних характеристик деталей з композиційних матеріалів. Його особливістю є те, що ефективні пружні властивості композиційного матеріалу для розрахунків потрібно знаходити за допомогою процедури чисельної гомогенізації композиційних матеріалів різної структури армування. Ортотропні властивості еквівалентного гомогенного матеріалу потрібно задавати в локальних системах координат скінченних елементів відповідно до просторової геометрії конструкцій.

2. За допомогою програмного пакету ANSYS здійснено чисельне визначення власних частот і форм коливань тривимірно армованої композиційної широкохордної лопатки вентилятора та лопаті повітряного гвинта.

3. У двох серіях розрахунків лопатки вентилятора зміна власних частот коливань пов'язана зі зміною осей симетрії еквівалентного гомогенного ортотропного матеріалу, що дозволяє відстроювати композитні конструкції від резонансів на проєктному етапі.

4. Відсутність автоколивань на проєктному етапі широкохордної лопатки вентилятора потребує експериментального підтвердження.

5. Основні результати цього розділу дисертаційного дослідження опубліковано в роботах [16, 17].

4.5 Література до четвертого розділу

1. Birger I. A., Shorr B. F. The dynamics of aviation gas turbine engines. Moscow. Mashinostroenie, 1981. 232 p. (in. Russian).
2. Coroneos R. M., Gorla R. S. R. Structural Analysis and Optimization of a Composite Fan Blade for Future Aircraft Engine. *Int. J. Turbo Jet-Engines*, 2012. Vol. 29. DOI: 10.1515/tjj-2012-0024.
3. Wollmann T., Modler N., Dannemann M., Langkamp A., Nitschke S., Filippatos A. Design and testing of composite compressor blades with focus on the vibration behaviour. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2017. Vol. 92, P. 183-189. DOI: 10.1016/j.compositesa.2016.06.012.
4. Wang Z., Chen Y., Ouyang H., Wang A. Investigation of Vibration Characteristics of Titanium Wide-Chord Fan Blade. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2019. Vol. 8. P. 529-540. DOI: 10.1007/s42417-019-00108-1.
5. Xiao J.-G.-Y., Chen Y., Tian J., Ou-Yang H., Wang, A. Numerical investigation of rub-induced composite fan blade vibrations and abradable coating removals. *Composite Structures*, 2019. Vol. 226. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111274.
6. Zhang J., Shi F., Wu H., Ren J., Wang H., Hu D., Influences of physical and structural parameters on vibration modes for large-scale rotating wind turbine blades, *Journal of Vibroengineering*, 2017. Vol. 19. P. 1173-1184. DOI: 10.21595/jve.2016.17062.
7. Min J. B., Duffy K. P., Choi B. B., Provenza A. J., Kray N. Numerical modeling methodology and experimental study for piezoelectric vibration damping control of rotating composite fan blades. *Computers and Structures*, 2013. Vol. 128. P. 230-242. DOI: 10.1016/j.compstruc.2013.06.001.
8. Finnegan W., Jiang Y., Dumergue N., Davies, P., Goggins J. Investigation and Validation of Numerical Models for Composite Wind Turbine Blades. *Journal of Marine Science and Engineering*, 2021. Vol 9. DOI: 10.3390/jmse9050525.
9. Ramesh A., Ganesan C., Kumaravelan R. Numerical analysis of engine inlet fan blades with different materials. *Materials Today: Proceedings*, 2021. Vol. 42. P. 1274-1278. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.12.954.

10. Chen Y., Jin L., Tang X., Huang D., Zhang J. Dynamic Response of a Composite Fan Blade Excited Instantaneously by Multiple MFC Actuators. *Aerospace*, 2022. Vol. 9. DOI: 10.3390/aerospace9060301.
11. Zhou J., Liu B., Wang D., Li X. Dynamic Characteristics Analysis of Blade of Fan Based on Ansys. *Power and Energy Engineering Conference*, 2010. P. 364-368.
12. Hand L.N., Finch J.D. Analytical mechanics. *Cambridge University Press*. 1998. 575 p.
13. Блох В.І. Теорія пружності. Монографія. 1964. Видавництво Харківського університету. 484 с.
14. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of Elasticity. Course of Theoretical Physics. Pergamon Press. 2ed. 1970. 165 p.
15. White F.M. Fluid Mechanics. McGraw-Hill series in mechanical engineering. 2011. 864 p.
16. Morozov A. V., Kravchenko I. F., Torba Yu. I., Lvov G. I. Dynamics numerical prediction for composite wide-chord fan blade. *IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology*. 2021. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570052.
17. Морозов А. В. Метод чисельного визначення динамічних характеристик лопаті повітряного гвинта з композиційного матеріалу. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2024. № 2 (194). С. 57-64. DOI: 10.32620/aktt.2024.2.06.

РОЗДІЛ 5 ВЕРИФІКАЦІЯ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ І ВІДПОВІДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

5.1 Експериментальне дослідження характеристик міцності та пружності зразків з композиційного матеріалу

Для верифікації моделі представницького елемента об'єму тривимірно армованого КМ, що використовувалася в чисельних експериментах здійснено експериментальне дослідження характеристик міцності та пружності натурних зразків тривимірно армованого композиційного матеріалу методом тензометрії.

Для верифікації моделі в першому і другому чисельних експериментах, розтягу в напрямках осей X і Y – проведено випробування на універсальній машині, яка забезпечує навантаження зразка із заданою постійною швидкістю переміщення активного захвату. Метод механічних випробувань зразків на розтяг відповідає ГОСТ 25.601 [1].

Для визначення модулів пружності E_x , E_y зразки рівномірно із заданою швидкістю триразово навантажено в межах початкового лінійного відрізка діаграми деформування.

Для визначення границь міцності σ_x^+ , σ_y^+ зразки рівномірно із заданою швидкістю навантажено до руйнування.

Зразки двох груп (матеріал по основі та по утку) з композиційного матеріалу препаровано тензорезисторами Zemic з обох боків у середині робочої зони (рис. 5.1). Величини деформацій тензорезисторів визначено за допомогою вимірювальної системи НВМ.

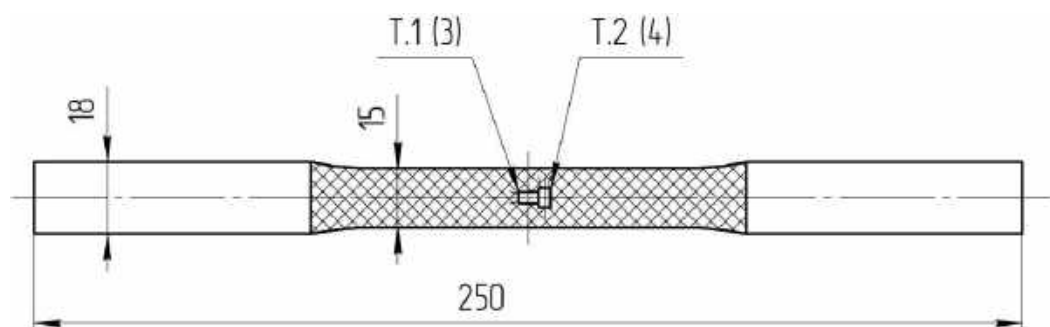


Рисунок 5.1. Схема препарування, форма та розміри зразків, випробуваних на розтяг

Модуль пружності при розтягу визначено за формулою

$$E = \frac{\Delta F}{S \cdot \varepsilon}, \quad (5.1)$$

де ΔF – приріст навантаження;

S – площа перерізу зразка;

ε – зміна поздовжньої відносної деформації зразка (Т.1/Т.3) при зміні навантаження на ΔF .

Границю міцності при розтягу визначено за формулою

$$\sigma^+ = \frac{F_{max}}{S}, \quad (5.2)$$

де F_{max} – руйнуюче навантаження.

Вигляд зразків після випробування наведено на рис. 5.2.



Рисунок 5.2. Зразки на розтяг після випробування

Для верифікації моделі в четвертому чисельному експерименті, зсуву в площині ХУ – проведено випробування на універсальній машині, яка забезпечує навантаження зразка із заданою постійною швидкістю переміщення активного захвату в спеціальному пристрої (рис. 5.3). Метод випробувань зразків на зсув перекошуванням пластини відповідає ГОСТ Р 50578 [2].

Для визначення модуля зсуву G_{xy} , та границі міцності τ_{xy} зразки рівномірно із заданою швидкістю навантажено до руйнування із записом діаграми деформування.

Зразки з композиційного матеріалу препаровані тензорезисторами Zetis з обох боків у середині робочої зони (рис. 5.4). Величини деформацій тензорезисторів визначено за допомогою вимірювальної системи НВМ.

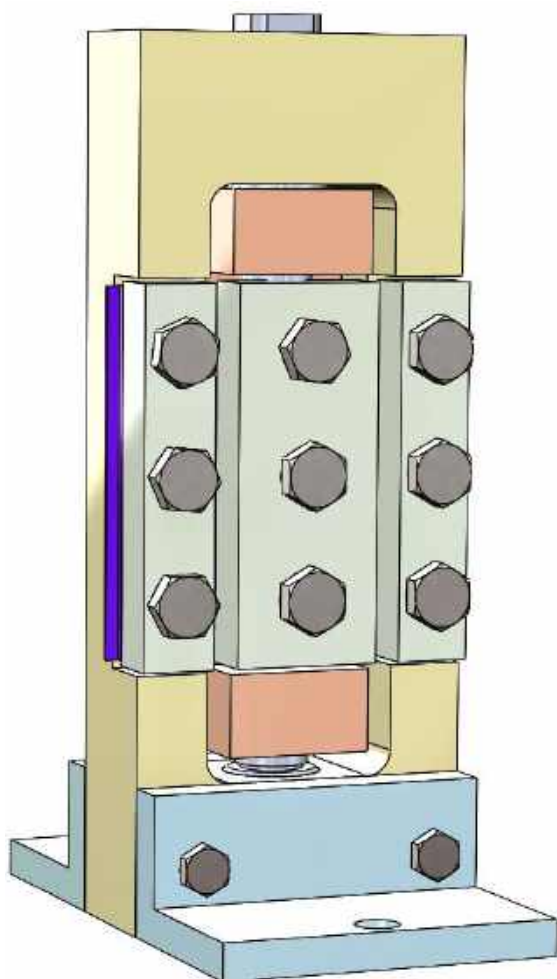


Рисунок 5.3. Спеціальний пристрій для закріплення та навантаження зразка на випробувальній машині

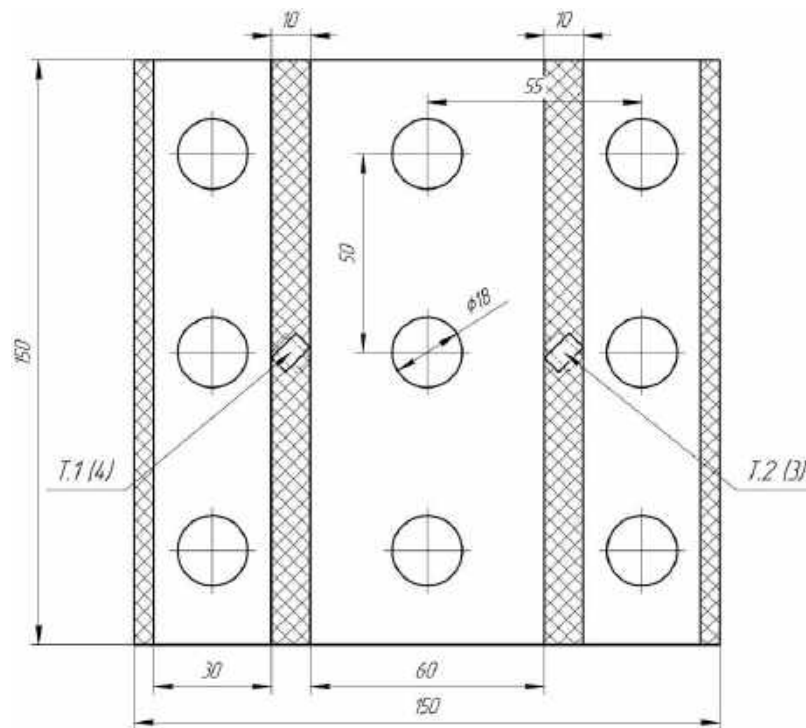


Рисунок 5.4. Схема препарування, форма та розміри зразків при зсуві
Модуль зсуву визначено за формулою

$$G_{xy} = \frac{\Delta F}{2S} \times \frac{1}{\Delta \gamma}, \quad (5.3)$$

де ΔF – приріст навантаження;

S – площа поперечного перерізу зразка;

$\Delta \gamma = 2\varepsilon_{45^\circ}$ – відповідний приріст деформації зсуву;

ε_{45° – усереднені показники деформації від тензорезисторів.

Границю міцності при зсуві визначено за формулою

$$\tau_{xy} = \frac{F_{max}}{2S}, \quad (5.4)$$

де F_{max} – руйнуюче навантаження.

Вигляд зразків після випробування наведено на рис. 5.5.

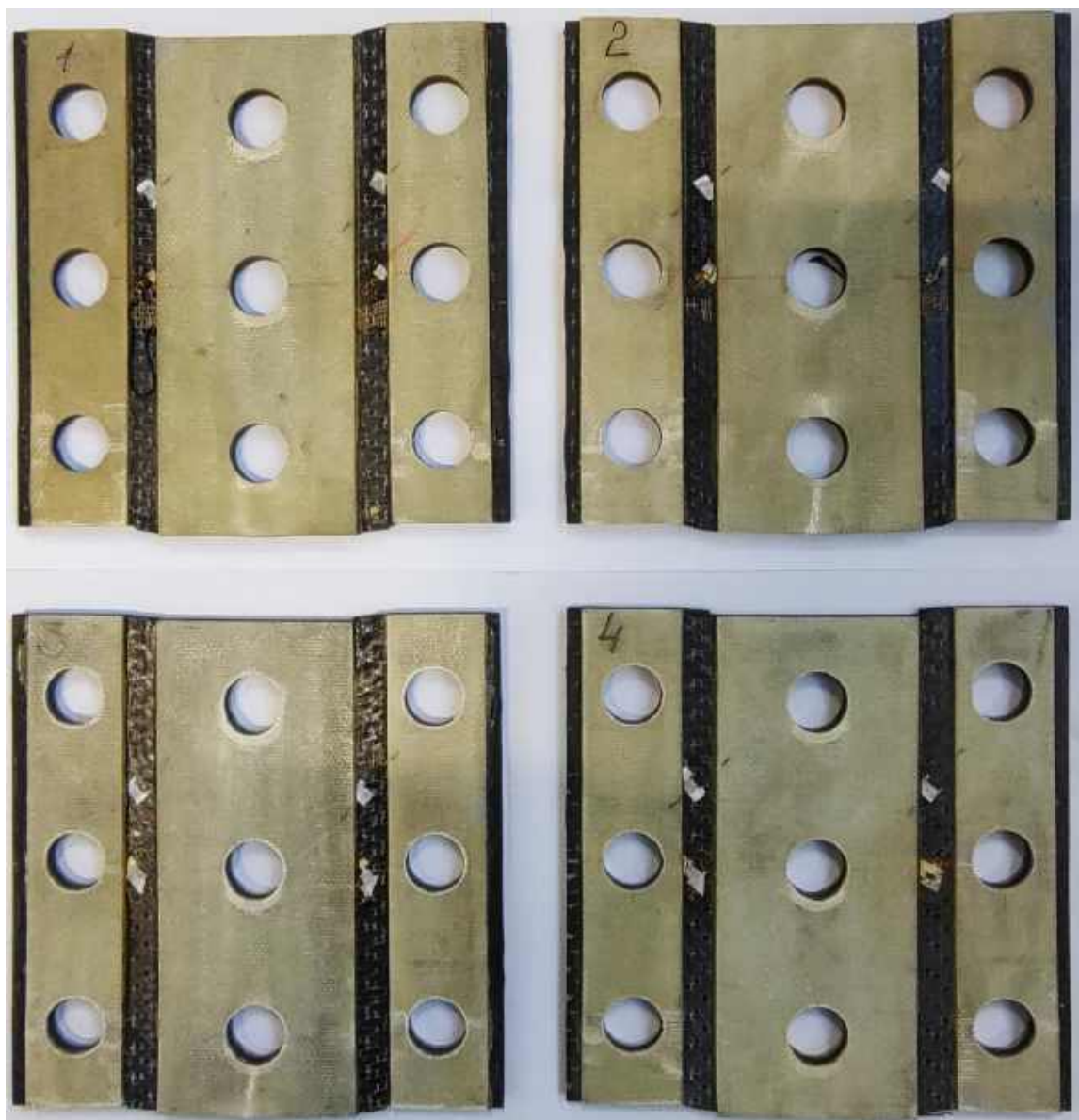


Рисунок 5.5. Зразки після випробування на зсув

Порівняння результатів розрахунків із визначення модулів пружності з експериментальними даними наведено в таблиці 5.1. Відносну різницю між ними розраховано за формулою

$$\left| \frac{E_p^2 - E_e^2}{E_p^2 + E_e^2} \right| \cdot 100\%, \quad (5.5)$$

де E_p – модулі пружності та зсуву отримані чисельно;

E_e – модулі пружності та зсуву отримані експериментально.

Таблиця 5.1

Чисельне й експериментальне значення модулів пружності та їх різниця

Модуль пружності	E_x , МПа	E_y , МПа	G_{xy} , МПа
Розрахунок	60701	48263	3702,7
Експеримент	56265	47289	3943,6
Різниця, %			
Похибка	7,57	2,04	6,29

Більша різниця у верифікації чисельного й експериментального досліджень становить 7,57 % для модуля пружності E_x .

Порівняння результатів розрахункових даних із визначення границь міцності з експериментальними наведено в табл. 5.2. Відносну різницю між ними розраховано за формулою

$$\left| \frac{\sigma_p^2 - \sigma_e^2}{\sigma_p^2 + \sigma_e^2} \right| \cdot 100\%, \quad (5.6)$$

де σ_p – границя міцності, отримана чисельно;

σ_e – границя міцності, отримана експериментально.

Таблиця 5.2

Чисельне й експериментальне значення границь міцності та їх різниця

Границя міцності	σ_x^+ , МПа	σ_y^+ , МПа	τ_{xy} , МПа
Розрахунок	739	550,9	84,4
Експеримент	750,5	585,8	87,6
Різниця, %			
Похибка	1,54	6,13	3,72

Більша похибка у верифікації чисельного й експериментального досліджень становить 6,13 % для границі міцності σ_y^+ .

5.2 Експериментальне дослідження динамічних характеристик лопаті повітряного гвинта

Для верифікації моделі лопаті ПГ, що використовувалася в чисельних експериментах при визначенні динамічних характеристик, проведено експериментальне дослідження перших п'яти власних форм і частот коливань натурної лопаті ПГ.

Дослідження здійснено методом вільних коливань та резонансним методом.

Роботу проведено на вібраційному електродинамічному стенді (рис. 5.6). Стенд перетворює сигнал синусоїдальної форми із зовнішнього генератора в механічний рух, який передається до лопаті вібраціями системи. Вібраційна частина системи складається з рухомої котушки, проміжного стакану, столу вібратора та надбудованого пристосування.

Лопать препарована тензорезисторами Zemic на поверхні спинки та корита. Величини деформацій тензорезисторів визначено за допомогою вимірювальної системи НВМ.

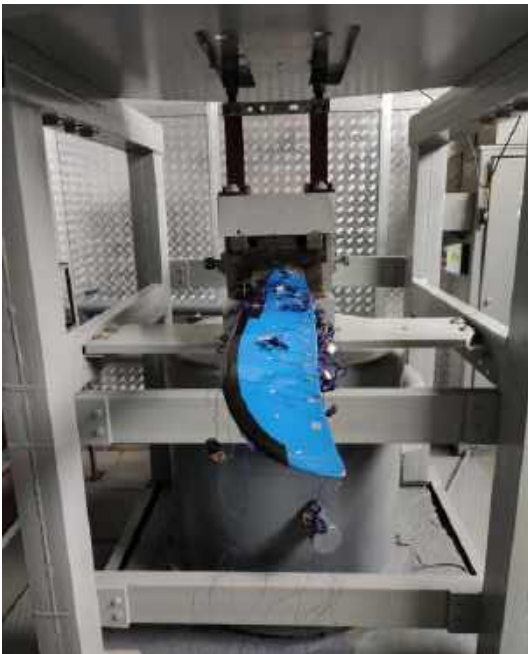


Рисунок 5.6. Препарована лопать на вібраційному електродинамічному стенді

Проведено два етапи експериментального дослідження:

1. Визначення власних форм та частот коливань.
2. Визначення розподілу поля деформацій на поверхні лопаті.

Перший етап дослідження.

Метод вільних коливань базується на аналізі спектру частот власних коливань лопаті. Лопать, стиснена в спеціальному захваті за стакан, встановлювалася на стенд. Шляхом короткочасного зовнішнього впливу на лопать ударом або щипком збуджувалися власні коливання, в результаті чого в лопаті виникали власні згасаючі коливання, які фіксувалися за допомогою сигналів з тензорезисторів і мікрофонів. Із використанням перетворення Фур'є вихідний сигнал розкладався на суму дискретних гармонічних складових (синусоїд) з різними амплітудами, періодами та частотами. Надалі аналізувалися частотні компоненти цих функцій (виконувався спектральний аналіз).

Резонансний метод базується на явищі зростання амплітуди вимушених коливань лопаті у разі наближення частоти збуджуючої сили, що надходить від вібраційного електродинамічного стенду, до частоти власних коливань лопаті.

Кожній власній частоті коливань відповідає своя форма. Форми коливань лопаті відрізняються розподілом переміщень з визначеним рисунком вузлових ліній, на яких амплітуда переміщень дорівнює нулю. Вузлові лінії розділяють поверхню лопаті на зони, які мають амплітуди переміщень протилежних знаків. Вузлові лінії визначено на резонансних режимах коливань лопаті (власна частота лопаті співпадає з частотою збудження вібростенду), при переході через вузлову лінію змінюється фаза сигналу. Роботу проведено в частотному діапазоні 10...300 Гц.

За рисунком вузлових ліній ідентифіковано власні форми коливань.

Порівняння розрахункових власних частот коливань моделі лопаті, представлених у попередньому розділі (рис. 4.26...4.30), з експериментальними наведено в табл. 5.3.

Відносну різницю між результатами чисельного та експериментального досліджень розраховано за наступною формулою:

$$\left| \frac{f_p^2 - f_e^2}{f_p^2 + f_e^2} \right| \cdot 100\%, \quad (5.7)$$

де f_p — власні частоти коливань отримані розрахунково;

f_e — власні частоти коливань отримані експериментально.

Таблиця 5.3

Чисельне й експериментальне значення власних частот коливань лопаті ПГ та їх різниця

Власні частоти	f_1 , Гц	f_2 , Гц	f_3 , Гц	f_4 , Гц	f_5 , Гц
Розрахунок	26,1	83,4	123,5	205,9	242,7
Експеримент	26,7	86,4	121,1	197,6	241,1
Різниця, %					
Похибка	2,27	3,53	1,96	4,11	0,66

Найбільша різниця між результатами чисельного та експериментального досліджень становить 4,11 % для четвертої частоти коливань.

Другий етап дослідження.

Визначення розподілу поля деформацій на поверхні лопаті здійснено для складання схеми препарування. Ця схема потрібна для обґрунтування відповідності ПГ вимогам пункту CS-P 530 [3]. Схема складається таким чином, щоб розташування та кількість точок вимірювання забезпечили адекватну індикацію вібраційних напружень для всіх проявлених форм коливань лопаті.

Експериментально визначений розподіл поля деформацій для всіх форм коливань співпадає з розподілом відносних напружень, що визначено в попередньому розділі (рис. 4.26...4.30).

Наприклад, для четвертої власної форми коливань максимальні деформації на поверхні лопаті, що зафіксовані тензорезистором (рис. 5.7), співпадають з максимальними відносними напруженнями, визначеними при чисельному дослідженні.

Для четвертої форми коливань максимальні деформації, зафіксовані в експериментальному дослідженні, локалізовані на поверхні обшивки зі сторони корита в зоні різкої зміни геометричної форми. Четверта форма є першою крутильною формою коливань лопаті. Крутильні коливання здійснюються відносно лінії центрів жорсткості поперечних перерізів лопаті.

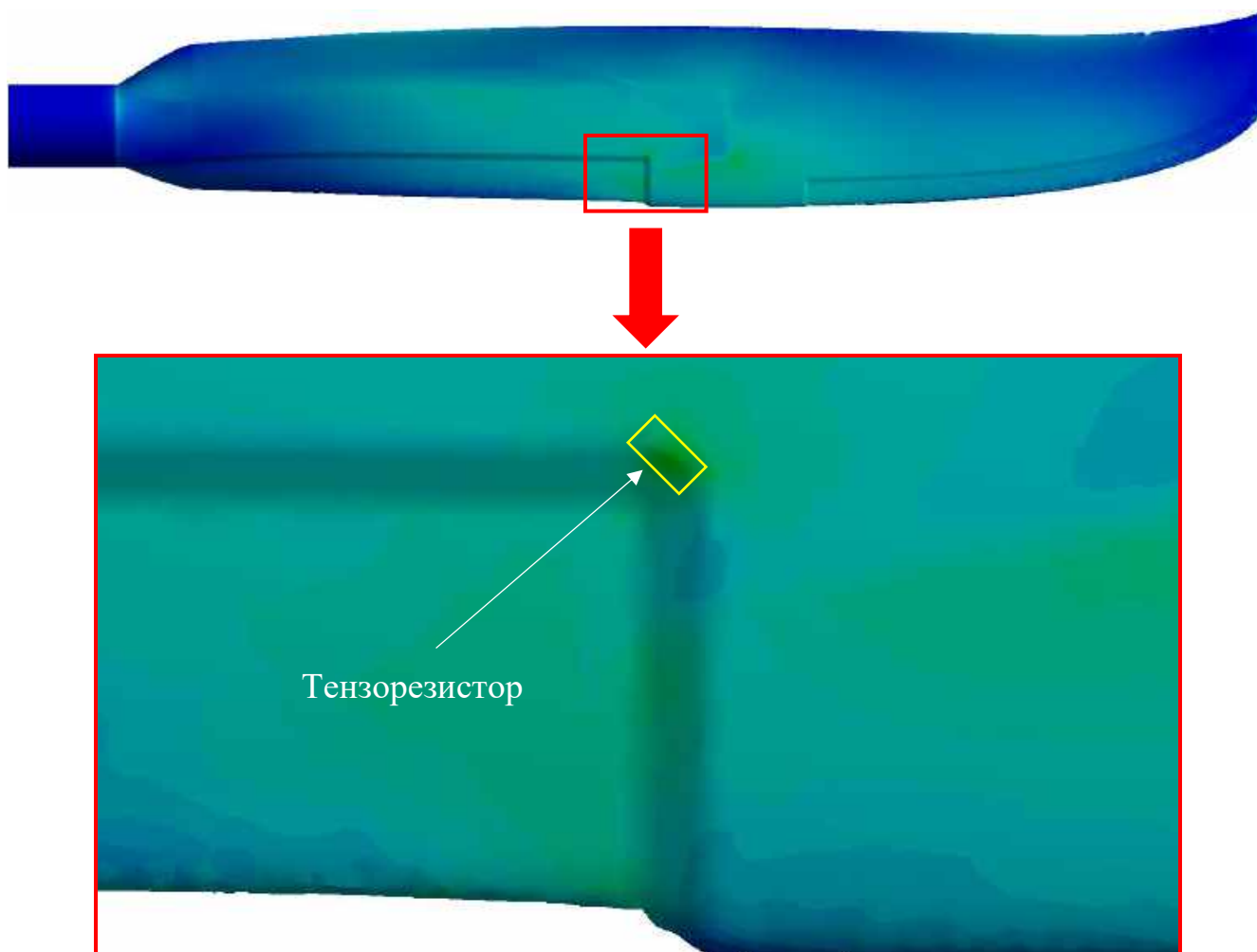


Рисунок 5.7. Дослідження напружених зон лопаті для четвертої форми коливань

Для п'ятої власної форми коливань зона максимальних деформацій на поверхні лопаті, зафіксованих тензорезистором та місце максимальних відносних напружень у чисельному дослідженні представлені на рис. 5.8.

Для п'ятої форми коливань максимальні деформації, зафіксовані в експериментальному дослідженні, локалізовані на поверхні обшивки зі сторони спинки на позначеній зоні. П'ята форма коливань є третьою згинальною формою коливань лопаті. Вигін лопаті здійснюється навколо осі найменшої жорсткості перерізу.

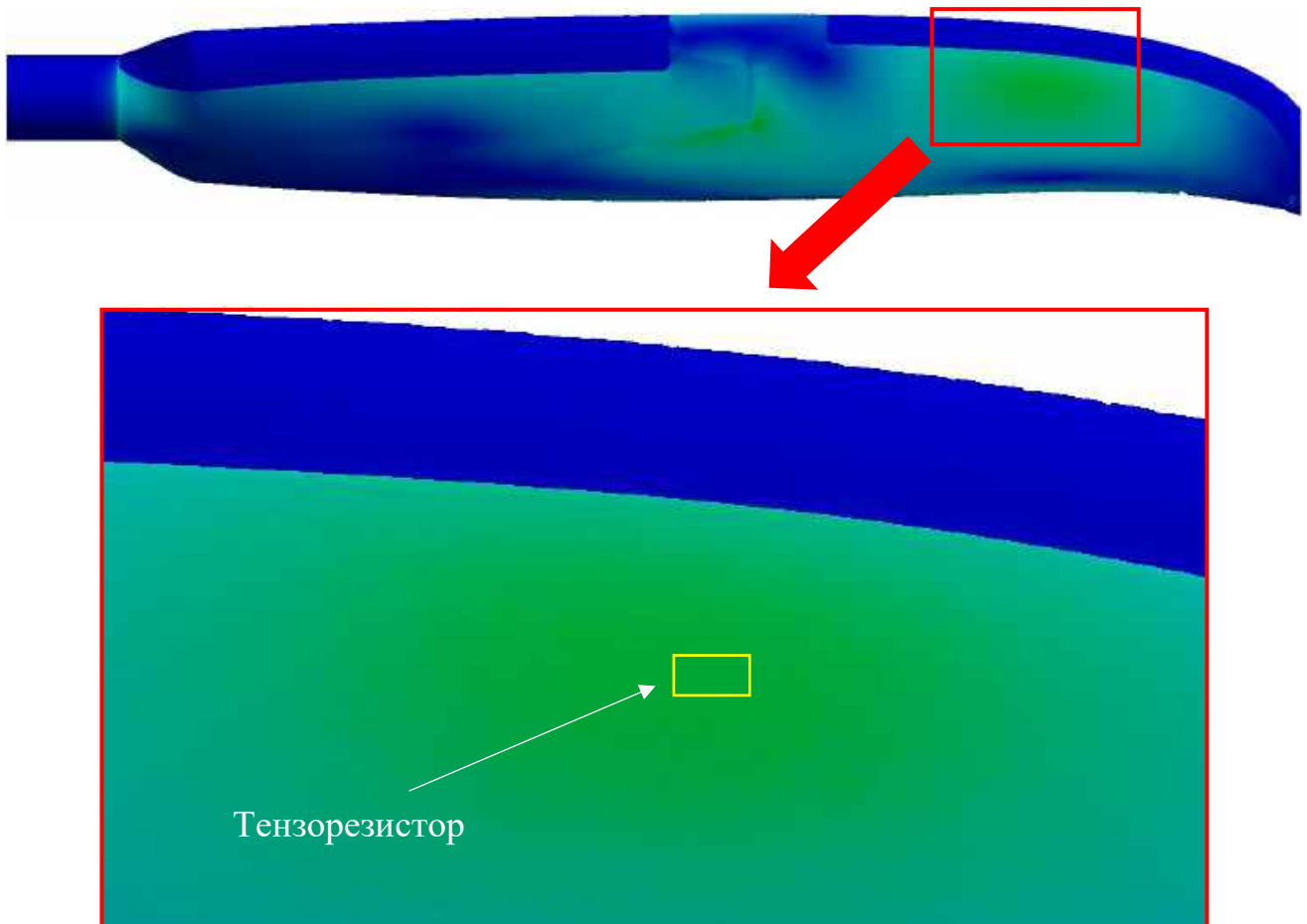


Рисунок 5.8. Дослідження напружених зон лопаті для п'ятої форми коливань

5.3 Висновки з розділу

За результатами, описаними вище, можна зробити наступні висновки:

1. Здійснено верифікацію методу визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів різної структури армування. Порівняння результатів чисельного дослідження моделі представницького елемента об'єму тривимірно армованого КМ і результатів експериментального дослідження натурних зразків з КМ при розтягу та зсуві визначило найбільшу розбіжність в 7,57 % для модуля пружності E_x .

2. Виконано верифікацію методу визначення параметрів критерію міцності тривимірно армованого композиційного матеріалу. Порівняння результатів чисельного дослідження моделі представницького елемента об'єму тривимірно армованого КМ і результатів експериментального дослідження натурних зразків з КМ

при розтягу та зсуві, визначило найбільшу розбіжність в 6,13 % для границі міцності σ_y^+ .

3. Проведено верифікацію методу визначення динамічних характеристик лопаті повітряного гвинта. Порівняння між результатами чисельного дослідження моделі лопаті ПГ і експериментального дослідження натурної лопаті ПГ показало збіг розподілу полів деформацій та відносних напружень для всіх форм коливань. Для власних частот коливань лопаті найбільша розбіжність між результатами чисельного і експериментального досліджень становить 4,11 % для четвертої частоти коливань.

5.4 Література до п'ятого розділу

1. ГОСТ 25.601-80 Методи механічних випробувань композиційних матеріалів із полімерною матрицею (композитів). Метод випробувань плоских зразків на розтяг при нормальній, підвищеній та зниженій температурах. М.: Вид-во стандартів, 1980. 14 с.

2. ГОСТ Р 50578-93 Матеріали полімерні композиційні. Метод випробування на зсув перекошуванням пластини. М.: Вид-во стандартів. 1993. 11 с.

3. EASA Certification Specifications for Propellers CS-P.

ВИСНОВКИ

За результатами дослідження розв'язано науково-практичне завдання з розробки методу визначення характеристик динаміки та міцності роторних деталей АГТД з КМ за відомими властивостям структурних компонентів (волокон і матриці). Застосування цього методу дозволяє вирішити проблему впровадження роторних деталей з КМ в конструкцію АГТД на підприємстві АТ «Івченко-Прогрес».

У дисертаційній роботі проведено аналіз літературних джерел з описом теоретичних і емпіричних методів визначення ефективних пружних сталих КМ. Розглянуто найбільш поширені в інженерній практиці критерії міцності КМ для тривісного напруженого стану. Обґрунтовано використання квадратичного критерію міцності другого порядку, що враховує різницю в границях міцності при розтягу та стиску й не містить надлишкових параметрів. Сформульовано повну систему рівнянь, що описує механічний стан тіла в межах підходу механіки суцільних середовищ. Механічний стан тіла описано за допомогою напружень, деформацій і переміщень точок тіла.

При виконанні досліджень отримані наступні нові наукові та практичні результати:

1. Проведено скінченно-елементне моделювання представницького елемента об'єму 3D КМ з об'ємним вмістом волокон 57 %. Для виключення взаємоперетину x -волокон основи, y -волокон утоку та z -волокон здійснено моделювання зі змінним поперечним перерізом. Це дозволило виконати прямий аналіз НДС моделі комірки періодичності без екстраполяції властивостей матеріалу з моделей з меншим об'ємним вмістом волокон.

2. Створено універсальний метод розв'язання задач чисельної гомогенізації композиційних матеріалів різної структури армування. Він дозволяє виконувати аналіз локальних напружень і деформацій усередині компонентів моделі представницького елемента об'єму 3D КМ в умовах однорідного середнього напруженого стану еквівалентного однорідного матеріалу. Запропоновано процедуру формування граничних умов для виконання мікромеханічного аналізу

представницького елемента об'єму. За допомогою розробленого методу визначено всі компоненти тензора пружних сталих еквівалентного ортотропного матеріалу та інженерні константи, які використано в якості незалежних розрахункових властивостей матеріалу для аналізу НДС лопатки вентилятора та лопаті ПГ.

3. Створено чисельний і аналітичний метод знаходження параметрів квадратичного критерію міцності ортотропного тіла, який враховує різницю між міцності при розтягу та стиску. Визначено всі границі міцності та коефіцієнти критерію міцності еквівалентного ортотропного матеріалу, які можна використовувати для дослідження статичної міцності композитних конструкцій.

4. Побудовано скінченно-елементну модель лопатки вентилятора. Проведено аналіз НДС моделі при визначенні власних частот і форм коливань. Особливістю чисельного моделювання конструкцій із композиційних матеріалів є те, що властивості еквівалентного ортотропного гомогенного матеріалу потрібно задавати відповідно до просторової геометрії конструкції.

Досліджено залежність значень власних частот коливань лопатки від частот обертання вентилятора для перших п'яти форм. Показано, що збільшення частоти обертання колеса вентилятора збільшує жорсткість лопатки вентилятора, що призводить до збільшення власних частот коливань. Власні частоти коливань мають нелінійну залежність від частоти обертання колеса вентилятора. Згинальна жорсткість більше залежить від частоти обертання колеса вентилятора ніж крутильна жорсткість лопатки.

Визначено зміну значень власних частот коливань лопатки вентилятора зі зміною осей симетрії еквівалентного гомогенного ортотропного матеріалу, що надає інструмент для відлаштування композитних конструкцій від резонансів на проєктному етапі. Після проведення двох серій розрахунків побудовано діаграми Кемпбела та аналітично перевірено стійкість лопатки вентилятора до автоколивань згідно з найбільш поширеним критерієм, оснований на використанні числа Струхалія.

5. Створено скінченно-елементну модель лопаті ПГ, яка складається з компонентів з різними властивостями матеріалів, що мають ідеальний контакт між собою. Компоненти з ортотропними властивостями матеріалу – обшивка, лонжерон,

ровінг; з ізотропними властивостями – вкладиш, накладки. Властивості матеріалу кожного компонента лопаті задано в локальних і глобальних системах координат. Досліджено особливості НДС моделі при визначенні перших п'яти власних частот і форм.

6. Виконано верифікацію моделі представницького елемента об'єму тривимірно армованого КМ шляхом проведення випробувань натурних зразків на розтяг і чистий зсув. Найбільша розбіжність між результатами чисельного й експериментального досліджень становить: для модулів пружності – 7,57 % (E_x), для границь міцності – 6,13 % (σ_y^+).

7. Здійснено верифікацію моделі лопаті ПГ за допомогою експериментального дослідження перших п'яти форм та частот власних коливань натурної лопаті ПГ. Найбільша розбіжність між результатами чисельного й експериментального досліджень становить 4,11 % для четвертої частоти коливань.

Перспективами подальших наукових досліджень у напрямку теми дисертаційної роботи є дослідження статичної міцності роторних композитних деталей авіаційних двигунів під впливом відцентрових сил і газового потоку. В розрахунках планується використання аналітично-чисельного методу визначення параметрів критерію міцності, яких враховує різницю меж міцності при розтягу та стиску.

Усі поставлені в дисертаційній роботі завдання вирішені, мета дослідження досягнута.

ДОДАТОК АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ДИСЕРТАЦІЇ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор підприємства

Генеральний конструктор

ДП «Івченко-Прогрес»

І.Ф. Кравченко

_____ 2023 р.



АКТ № 6 від 20 грудня 2023 р.
про впровадження результатів дисертаційного дослідження
провідного інженера-дослідника
МОРОЗОВА Андрія Володимировича
на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 142 – енергетичне машинобудування

Комісія у складі:

голови: заступника головного конструктора з міцності Костіна М.М.

членів: керівника групи к.т.н. Петрова О.В., керівника групи
к.т.н. Придорожного Р.П.

у період з 30 листопада 2023 року до 19 грудня 2023 року розглянула матеріали
наукових досліджень МОРОЗОВА Андрія Володимировича.

Комісія засвідчує:

1. Результати наукових досліджень, що проведено МОРОЗОВИМ
Андрієм Володимировичем, складають:

– метод чисельного визначення ефективних пружних характеристик
тривимірно армованого композиційного матеріалу (КМ);

– метод чисельного визначення параметрів критерію міцності тривимірно
армованого КМ;

– підхід до визначення динамічних характеристик деталей з КМ.

2. Запропонований метод чисельного визначення пружних характеристик
КМ по відомим пружним властивостям структурних компонентів дозволив

визначити усі компоненти тензора пружних сталих еквівалентного ортотропного матеріалу для тривимірно армованого КМ.

3. Запропонований метод чисельного визначення параметрів критерію міцності КМ, на базі аналізу локальних напружень і деформацій усередені представницького елементу об'єму тривимірно армованого КМ, дозволив визначити усі границі міцності та коефіцієнти критерію міцності еквівалентного ортотропного матеріалу тривимірно армованого КМ.

4. Чисельне визначення ефективних пружних характеристик та параметрів критерію міцності КМ дозволило скоротити обсяг експериментальних досліджень на установках ДП «Івченко-Прогрес», потрібних для отримання незалежних розрахункових характеристик матеріалу.

5. Розрахунок динамічних характеристик лопатки вентилятора та лопаті повітряного гвинта, дозволив на етапі проектування деталей забезпечити вимоги динамічної міцності.

6. Результати наукових досліджень використовуються при проектуванні лопаток вентилятора та лопатей повітряного гвинта в частині забезпечення необхідних характеристик міцності, зокрема під час проектування лопаток вентилятора двигуна AI-28, лопаті повітряного гвинта AI-P500V5.

7. Результати наукових досліджень вважати реалізованими.

Голова комісії:



Костін М.М.

Члени комісії:

к.т.н.



Петров О.В.

к.т.н.



Придорожний Р.П.